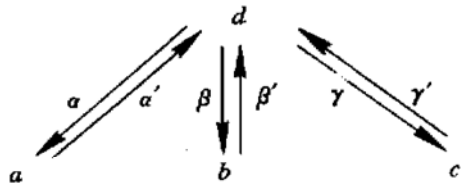
由于 Γ 的生成关系的生成元集 $I_1 \cup I_2$ 均由 path 组成, 故立即可得下述的

推论 Γ 是零关系代数.

例 设 $X = \{a,\ b < c < d\}$, 即 X 有 Hasse 图

$$\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ & & \uparrow & & \\ b & \leftarrow & c & \leftarrow & d \end{array}$$

则 X 的对偶扩张代数的 Ringel 对偶是由下述带关系的箭图定义的代数:



其中, $\alpha'\alpha = \beta'\beta = \gamma'\gamma = \alpha'\beta = \beta'\alpha = 0$; $\alpha'\gamma\gamma'\alpha = \beta'\gamma\gamma'\beta = \alpha'\gamma\gamma'\beta = \beta'\gamma\gamma'\alpha = 0$.

致谢 感谢导师刘绍学先生的关怀与鼓励, 感谢惠昌常和邓邦明二位博士的帮助与指点. 本工作为国家自然科学基金(批准号: 19771070)和海南省教育厅自然科学部分基金资助项目.

参 考 文 献

1 Dlab V, Ringel C M. Quasi-hereditary algebras, ㊥ J Math, 1989, 33: 280~ 291
2 Dlab V, Ringel C M. The module theoretic approach to quasi-hereditary algebras. London Math Soc Lect Note ser, 1992, 168: 200~ 224
3 Xi C C. Quasi-hereditary algebras with a duality. J Reine Angew Math, 1994, 449: 201~ 215
4 Deng B M, Xi C C. Quasi-hereditary algebras which are dual extensions of algebras. Comm Alg, 1994, 22: 4 717~ 4 736
5 Deng B M, Xi C C. Quasi-hereditary algebras which are twisted double incidence algebras of posets. Contrib Alg Geom, 1995, 36: 37~ 71
6 张跃辉. 树型偏序集的双扭指标代数及其 Ringel 对偶. 数学年刊, 1997, 18A(6): 771~ 776

(1997-12-10 收稿. 1998-05-06 收修改稿)

一类随机变量部分和的矩不等式及其应用

杨善朝
(广西师范大学数学与计算机科学系, 桂林 541004)

摘要 引进 q 阶 M-Z 型随机变量序列概念, 这个概念包含了较广泛的一类随机变量序列. 对此类随机变量序列给出一个矩不等式, 并应用于 ρ 相依序列中, 获得与独立情形一致的矩不等式. 同时讨论 ρ 相依序列的强大数律.

关键词 **q 阶 M-Z 型序列 矩不等式 强大数律**

先引进一个概念.

定义 设 $\{X_i:\ i \geqslant 1\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 中的随机变量序列, $q > 1$ 为实数. 如果存在

与 n, a 无关的正常数 C 使

$$E\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i\Big|^q \leqslant CE\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i^2\Big|^{q/2}, \quad \forall n \geqslant 1, \ a \geqslant 0, \tag{1}$$

则称$\{X_i: i \geqslant 1\}$为 q 阶 M_Z 型随机变量序列.

这个概念的引进是受熟知的鞅序列中的 M_Z 型不等式的启发, 而且此概念包含了较大一类随机变量序列. 事实上, 由鞅序列的 M_Z 不等式(见文献[1] p. 149 定理 3. 3. 6)知, 鞅差序列是 q 阶 M_Z 型序列; 当然, 独立序列也是 q 阶 M_Z 型序列; 由 Bryc, Smolenski[2] 的引理 2 (见本文后面引理 1)知, ρ 相依序列亦为 q 阶 M_Z 型序列.

众所周知, 式(1)本身是一个很有用的矩不等式. 当 $1< q \leqslant 2$ 时, 由式(1)有

$$E\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i\Big|^q \leqslant C\sum_{i=a+1}^{a+n}E|X_i|^q, \quad \forall n \geqslant 1, \ a \geqslant 0, \tag{2}$$

这是一个非常方便于应用的矩不等式. 然而, 当 q> 2 时, 式(1)右边的矩未直接落到各个变量 X_i 上, 所以在应用中还不够方便, 根据独立序列的结果(见文献[3] p. 88 定理 19)知, 当 q> 2 时, 最好的形式应为

$$E\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i\Big|^q \leqslant C\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}E|X_i|^q + \Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}EX_i^2\Big|^{q/2}\Big|, \quad \forall n \geqslant 1, \ a \geqslant 0. \tag{3}$$

本文将对 q 阶 M_Z 型序列给出形如式(3)的矩不等式. 作为直接应用, 对 ρ 相依序列得到了形如式(3)的矩不等式, 从而推广了文献[2]中引理 3 就 $2< q \leqslant 4$ 给出的矩不等式, 并应用这些不等式研究 ρ 相依序列的强大数律.

1 M-Z 型序列的矩不等式

定理 1 设 $q> 2$, $\{X_i: i \geqslant 1\}$为零均值 q 阶 M-Z 型随机变量序列. 令 $U_i = X_i^2 - EX_i^2$. 如果$\{U_i: i \geqslant 1\}$仍为 $q/2$ 阶 M-Z 型随机变量序列, 则存在与 n, a 无关的正常数 C 使式(3)成立.

推论 1 设 $q> 2$, $\{X_i: i \geqslant 1\}$为零均值的独立随机变量序列, 则式(3)成立.

推论 1 是定理 1 的直接结论, 它正是文献[3]中关于独立情形的定理 19. 往后总是用 C 表示绝对常数, 不同处的 C 其值可能不同.

定理 1 的证明 由于$\{X_i: i \geqslant 1\}$为 q 阶 M_Z 型序列, 所以由式(1)知, 只需证明

$$E\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i^2\Big|^{q/2} \leqslant C\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}E|X_i|^q + \Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}EX_i^2\Big|^{q/2}\Big|. \tag{4}$$

由$\{U_i: i \geqslant 1\}$为 $q/2$ 阶 M_Z 型随机变量序列, 有

$$\begin{aligned} E\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i^2\Big|^{q/2} &\leqslant C\Big|E\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}U_i\Big|^{q/2} + \Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}EX_i^2\Big|^{q/2}\Big| \\ &\leqslant C\Big|E\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}U_i^2\Big|^{q/4} + \Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}EX_i^2\Big|^{q/2}\Big|, \end{aligned} \tag{5}$$

而

$$\begin{aligned} E\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}U_i^2\Big|^{q/4} &\leqslant CE\Big|\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i^4 + \sum_{i=a+1}^{a+n}(EX_i^2)^2\Big|^{q/4}\Big| \\ &\leqslant CE\Big|\Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i^4 + \Big|\sum_{i=a+1}^{a+n}EX_i^2\Big|^2\Big|^{q/4}\Big| \end{aligned}$$

$$\leqslant C\Big| E\Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i^4 \Big|^{q/4} + \Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2 \Big|^{q/2} \Big| . \tag{6}$$

联合式(5)和(6), 有

$$E\Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i^2 \Big|^{q/2} \leqslant C\Big| E\Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i^4 \Big|^{q/4} + \Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2 \Big|^{q/2} \Big| . \tag{7}$$

( ) 当 $2< q \leqslant 4$ 时, 有 $1/2< q/4 \leqslant 1$, 因此由式(7)即得式(4).

( ) 当 $q> 4$ 时, 由 Hölder 不等式, 有

$$\sum_{i=a+1}^{a+n} X_i^4 = \sum_{i=a+1}^{a+n} (X_i^2)^{(q-4)/(q-2)} (|X_i|^q)^{2/(q-2)}$$

$$\leqslant \Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i^2 \Big|^{(q-4)/(q-2)} \Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} |X_i|^q \Big|^{2/(q-2)}, \tag{8}$$

令 $\alpha = (q-4)/(2(q-2))$. 显然, $0< \alpha< 1$ 且 $1-\alpha = q/(2(q-2))$. 对任意给定的正数 $B> 0$, 由式(8)和不等式 $a^\alpha b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha) b$, 有

$$E\Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i^4 \Big|^{q/4} \leqslant E\Big| B \Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i^2 \Big|^{aq/2} B^{-1} \Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} |X_i|^q \Big|^{1-\alpha} \Big|$$

$$\leqslant B^{1/\alpha} E\Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i^2 \Big|^{q/2} + B^{-1/(1-\alpha)} \sum_{i=a+1}^{a+n} E|X_i|^q . \tag{9}$$

联合式(7)和(9), 得

$$E\Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i^2 \Big|^{q/2} \leqslant C\Big| B^{-1/\alpha} E\Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i^2 \Big|^{q/2} + B^{-1/(1-\alpha)} \sum_{i=a+1}^{a+n} E|X_i|^q + \Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2 \Big|^{q/2} \Big| .$$

在上式中移项合并, 得

$$(1 - CB^{1/\alpha}) E\Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i^2 \Big|^{q/2} \leqslant C\Big| B^{-1/(1-\alpha)} \sum_{i=a+1}^{a+n} E|X_i|^q + \Big| \sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2 \Big|^{q/2} \Big| .$$

对固定的 $q> 4$, C 也是固定正常数, 因此在上式中通过取 B 充分小使 $1 - CB^{1/\alpha} > 0$, 从而式(4)成立. 证毕.

2 应用

设 $\{\xi_i: i \in \mathbf{N}\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 中的随机变量序列, $\mathcal{F}_S = \sigma(\xi_i: i \in S \subset \mathbf{N})$ 为 σ-域, 在 $\mathcal{B}$ 中给定 σ-域 $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$ 令

$$\rho(\mathcal{F}, \mathcal{R}) = \sup\{\operatorname{corr}(\xi, \eta): \xi \in L_2(\mathcal{F}), \eta \in L_2(\mathcal{R})\},$$

Bradley[4, 5]. Bryc 和 Smolenski[2] 使用如下相依系数: 对 $k \geqslant 0$. 令

$$\rho(k) = \sup\{\rho(\mathcal{F}_S, \mathcal{F}_T): \text{有限子集 } S, T \subset \mathbf{N} \text{ 且 } \operatorname{dist}(S, T) \geqslant k\}, \tag{10}$$

显然, $0 \leqslant \rho(k+1) \leqslant \rho(k) \leqslant 1$ 且 $\rho(0) = 1$. 这种相依系数 $\rho(k)$ 与通常的 ρ 混合系数有一定的类似, 但也不完全相同. 事实上, 在通常的 ρ 混合系数中, 式(10)中的 S, T 分别是 $[1, n]$ 和 $[n+k, \infty]$ 中的子集. Bradley[4, 5] 在 ρ 相依下讨论了中心极限定理, Bryc 和 Smolenski[2] 讨论了随机级数收敛性和强大数律, 同时给出如下矩不等式.

引理 1[2] 设 $\rho = \rho(1) < 1$, $q > 1$, X_i 为 $\sigma(\xi)$ 可测且 $EX_i = 0$, $E|X_i|^q < \infty$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 则存在仅依赖于 ρ, q 的正常数 C 使式(1)成立.

利用引理 1 和定理 1, 立即有

定理 2 在引理 1 的条件下, 存在仅依赖于 ρ, q 的正常数 C, 使 $1< q \leqslant 2$ 时, 式(2)成立; $q > 2$ 时, 式(3)成立.

记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. 利用定理 2 和文献[1]定理 2.3.1 的证明方法, 有

推论 2 在引理 1 的条件下, 存在仅依赖于 ρ, q 的正常数 C 使 $1< q \leqslant 2$ 时, 有

$$E \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |S_j|^q \leqslant C(\log(4n))^q \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^q, \quad \forall n \geqslant 1;$$

当 $q> 2$ 时, 有

$$E \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |S_j|^q \leqslant C(\log(4n))^q \left| \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^q + \left| \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 \right|^{q/2} \right|, \quad \forall n \geqslant 1.$$

下面利用这些不等式讨论 S_n 的强收敛性.

定理 3 在引理 1 的条件下, 如果 $1< q \leqslant 2$ 且

$$\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^q (\log i)^q < \infty, \tag{11}$$

那么 S_n a. s. 收敛.

推论 3 在引理 1 的条件下, 如果 $1< q \leqslant 2$ 且

$$\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^q (\log i)^q / i^q < \infty, \tag{12}$$

那么 $S_n / n \to 0$ a. s. .

定理 4 在引理 1 的条件下, 如果 $q> 2$ 且存在 $\delta> q/2$, 使

$$\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^q (\log i)^{\delta} / i^{1+q/2} < \infty, \tag{13}$$

那么 $S_n / n \to 0$ a. s. .

注 定理 3 达到了正交序列的相应结果(见文献[1]定理 2.3.2); 推论 3 的条件(12)比文献[2]中定理 2 的条件(2)弱; 定理 4 中条件(13)几乎达到鞅序列强大数律的条件(见文献[1]定理 3.3.8).

定理 3 的证明 由定理 2 和式(11)有, $\forall m \geqslant n \geqslant 1$

$$E|S_m - S_n|^q \leqslant C \sum_{i=n+1}^{m} E|X_i|^q \to 0 (\text{当 } n \to \infty \text{时}),$$

因此, S_n 是 L^q 的 Cauchy 列, 从而存在 r. v. S 使 $E|S_n - S|^q \to 0$. 又 $\forall \varepsilon> 0$, 由定理 2 有

$$P(|S_{2^k} - S| > \varepsilon) \leqslant CE|S_{2^k} - S|^q \leqslant C \operatorname{limsup} E|S_{2^k} - S_n|^q$$

$$\leqslant C \sum_{i=2^k+1}^{\infty} E|X_i|^q \leqslant Ck^{-q}. \tag{14}$$

利用推论 2, 得

$$P\left(\max_{2^{k-1} < n \leqslant 2^k} |S_n - S_{2^{k-1}}| > \varepsilon \right) \leqslant CE\left| \max_{2^{k-1} < n \leqslant 2^k} |S_n - S_{2^{k-1}}|^q \right|$$

$$\leqslant C(\log(4 \cdot 2^k))^q \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} E|X_i|^q \leqslant C \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} E|X_i|^q (\log i)^q. \tag{15}$$

式(14)和(15)意味着: 当 $k \to \infty$时, 有

$$S_{2^k} \to S \text{ a. s. 且 } \max_{2^{k-1} < n \leqslant 2^k} |S_n - S_{2^{k-1}}| \to 0 \text{ a. s.},$$

由子序列法知, $S_n \to S$ a. s. 证毕.

推论 3 是由定理 3 和 Kronecker 引理直接得到. 为证明定理 4, 先引入如下几个引理.

引理 2[6] 设$\{Z_i: i \geqslant 1\}$为随机变量序列, $\gamma \geqslant 0$, $\alpha > 1$, 若 $\forall m \geqslant k \geqslant 1$, 有

$$E\left|\sum_{i=k}^{m} Z_i\right|^{\gamma} \leqslant \left|\sum_{i=k}^{m} u_i\right|^{\alpha}, \tag{16}$$

其中$\{u_i: i \geqslant 1\}$为非负常数列, 则存在仅依赖于 γ 和 α 的正常数 K 使得: $\forall \lambda > 0$, 有

$$P\left\{\max_{1 \leqslant m \leqslant n} \left|\sum_{i=1}^{m} Z_i\right| > \lambda\right\} \leqslant K\lambda^{-\gamma}\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right|^{\alpha}.$$

引理 3[7] r. v. $Z_n \xrightarrow{\text{a. s.}} Z$ 的充要条件是 $\sup_{m > n} |Z_m - Z_n| \xrightarrow{p} 0$.

引理 4 如果式(16)成立且 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i < \infty$, 那么 $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i$ a. s. 收敛.

证 令 $T_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. 由引理 2, $\forall N > n \geqslant 1$ 和 $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\max_{n \leqslant m \leqslant N} |T_m - T_n| > \varepsilon\right\} \leqslant C\left|\sum_{i=n+1}^{N} u_i\right|^{\alpha},$$

因此, 在上式中令 $N \to \infty$, 有

$$P\left\{\sup_{m \geqslant n} |T_m - T_n| > \varepsilon\right\} \leqslant C\left|\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i\right|^{\alpha} \to 0 (\text{当 } n \to \infty),$$

由此及引理 3 即得结论. 证毕.

定理 4 的证明 令 $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i / i$. 由 Kronecker 引理, 仅需要证明: T_n a. s. 收敛. 由式(13), 有 $E|X_i|^q \leqslant Ci^{q/2}(\log i)^{-\delta}$. 利用定理 2, $\forall m \geqslant n \geqslant 1$ 有

$$E\left|\sum_{i=n+1}^{m} X_i / i\right|^q \leqslant C\left|\sum_{i=n+1}^{m} (E|X_i|^q)^{2/q} / i^2\right|^{q/2} \leqslant C\left|\sum_{i=n+1}^{m} i^{-1}(\log i)^{-2\delta/q}\right|^{q/2}.$$

由于 $q > 2$, $\delta > q/2$, 所以 $q/2 > 1$ 且 $2\delta/q > 1$, 因此引理 4 的条件满足. 故 T_n a. s. 收敛. 证毕.

致谢 感谢审稿专家对本文提出有益的修改意见. 本工作为广西青年科学基金和广西高校科学基金资助项目.

参 考 文 献

1 Stout W F. Almost Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974
2 Bryc W, Smolenski W. Moment conditions for almost sure convergence of weakly correlated random variables. Proceeding of American Math Society, 1993, 119(2): 629~635
3 佩特罗夫 B 著. 独立随机变量之和的极限定理. 苏淳, 黄可明译. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1991. 88
4 Bradley R C. On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields. J Theoret Probab, 1992, 5: 355~374
5 Bradley R C. Equivalent mixing conditions for random fields. Technical Report No. 336, Center for Stochastic Processes, Univ of North Carolina, Chapel Hill, 1990
6 Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: John Wiley & Sons, 1968. 94

7 Chow Y S, Teicher H. Probability Theory. New York: Springer_Verlag, 1978. 68

(1997-10-13 收稿, 1998-05-13 收修改稿)

非线性泛函差分系统的吸引域

徐道义 徐安石
(四川联合大学数学系, 成都 610064)

摘要 讨论了具有无穷时滞的泛函差分系统的吸引域, 利用谱半径 ρ 小于 1 的含参非负矩阵及属于 ρ 的特征子空间给出了确定这类系统吸引域的充分条件.

关键词 泛函差分方程 吸引域 稳定性

由于非线性系统的平衡点一般不唯一, 故在已有的结果中, 对这类系统稳定性的讨论往往是局部的[1~3]. 就是经典的 Lyapunov 渐近稳定性定义给出的吸引域也可能充分小. 因此确定吸引域的大小一直是人们关注的问题. 本文则将对这一问题进行研究, 给出确定非线性泛函差分系统吸引域的具体方法.

考虑具有无穷时滞的泛函差分系统

$$x(m+1) = f(m, x_m), \quad m \in Z, \tag{1}$$

其中 $x \in R^n$, $f: Z \times C \to R^n$, $f(m, 0) \equiv 0$ 保证方程(1)总有零解, Z 是整数集, C 是所有函数 $\varphi: Z^- \to R^n$ 构成的集合, $Z^- = \{x \mid x \in Z, x \leqslant 0\}$, $x_m(s) = x(m+s)$, $\forall s \in Z^-$. 所以 $x_m \in C$, $\forall m \in Z$. 对于任意 $m_0 \in Z^+ = \{x \mid x \in Z, x \geqslant 0\}$, $\varphi \in C$, 设方程(1)满足初始条件 $x_{m_0} = \varphi(m \leqslant m_0)$ 的解存在, 并记作 $x(m) = x(m, m_0, \varphi)$.

令 $[\cdot]^+$ 为绝对值算子, 如 $x \in R^n$, 则 $[x]^+$ 表示对 x 的每一个元素取绝对值而形成的向量. 并定义 $x_m = [x_{1m}, \cdots, x_{nm}]^T$, $[x_m]_r^+ = [\|x_{1m}\|_r, \cdots, \|x_{nm}\|_r]^+$, 其中

$$\|x_{im}\|_r = \sup_{-r \leqslant s \leqslant 0} |x_i(m+s)|, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{2}$$

这里 $r = r(m) \geqslant 0$. 当 $r = \infty$ 时约定 $[x_{m_0}]_r^+ = [\varphi]_\infty^+$.

定义 1 若存在集合 $D \subset R^n$ ($D - \{0\}$ 非空), 对于任意 $m_0 \in Z^+$ 及 $\varphi \in C$, 当 $[\varphi]_\infty^+ \in D^+ = \{x \mid x \in D, x \geqslant 0\}$ 时都有

$$[x(m, m_0, \varphi)]^+ \leqslant [\varphi]_\infty^+, \quad \forall m \geqslant m_0, \tag{3}$$

则称 D 为(1)的稳定域. 若还有

$$\lim_{m \to \infty} x(m, m_0, \varphi) = 0,$$

则称 D 为方程(1)的渐近稳定吸引域.

令 $\rho(A)$ 表示方阵 A 的谱半径. 若 $A \geqslant 0$, 则 $\rho(A)$ 为 A 的特征根(文献[4], p. 503, 定理 8.3.1). 记 $w_\rho(A)$ 为 A 属于 $\rho(A)$ 的特征子空间, $w_\rho^+(A) = \{x \mid x \in w_\rho(A), x \geqslant 0\}$. $A \leqslant B$ 表示矩阵 A 的每一个元素都不超过 B 的对应元素. $A < B$ 表示 $A \leqslant B$ 但 $A \neq B$.

定义 2 令 $\Omega \subset R^n$, $A(x): \Omega \to R^{n \times n}$. 若对于任意 x', $x'' \in \Omega$, 当 $x' \leqslant x''$ 时有 $A(x') \leqslant A(x'')$, 则称矩阵函数 $A(x)$ 在 Ω 内单调不减.