二次系统 $(\mathrm{III})_{\delta=-m}$ 的极限环(一)*

孙 建 华

(南京大学数学系,南京 210008)

关键词 二次系统、极限环、唯一性、分枝

考虑二次系统 $(\mathrm{III})_{\delta=-m,l=0}$[1]

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+\delta x(y-1)+ny^2,\\ \dot{y}=x(1+ax-y).\end{cases}\tag{1}$$

不失一般性,其中已取 $b=-1$. 本文假定 $n>1$.

系统(1)最多存在四个奇点. 当 $-2<\delta<0$ 时, $O(0,0)$ 为不稳定焦点, $N\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 为鞍点. O 与 N 均位于直线 $y=ax+1$ 的下侧. 当 $a^2-4(n-1)a\delta>0$ 时(例如 $|\delta|\ll 1$),直线 $y=ax+1$ 上有两个奇点 S_1 和 S_2,且位于区域 $D=\{(x,y):x>0,y<1\}$ 之中. 易见, S_1 和 S_2 至少有一为鞍点. 不妨设 S_1 为鞍点.

如 O 外围极限环位于过鞍点 S_1 的分界线所围的区域中,则称 O 外围的环由奇点 S_1 决定.

定理 1[2] 当 $a\delta\leqslant 0$ 时,系统(1)无环.

不失一般性,为研究系统(1)在 O 外围的极限环,可假设 $-2<\delta<0$, $a<0$.

在系统(1)中引进变换 $x_1=x-\beta y$, $y_1=y$, 其中 β 为 $\varphi(x)=ax^3-x^2-\delta x-n=0$ 的唯一负实根. 系统(1)化为(仍以 x, y, t 记变量)

$$\begin{cases}\dot{x}=f_0(x)+f_1(x)y,\\ \dot{y}=g_0(x)+g_1(x)y+g_2(x)y^2,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $f_0(x)=-(\delta+\beta)x-a\beta x^2$, $f_1(x)=-(2a\beta^2-\beta-\delta)x-(\beta^2+\delta\beta+1)$,

$g_0(x)=x+ax^2$, $g_1(x)=(2a\beta-1)x+\beta$, $g_2(x)=a\beta^2-\beta$.

再作一系列变换

$$x=x,\quad \xi=f_0(x)+f_1(x)y,$$

$$\xi=u\exp\left(\int_0^x\frac{\delta-a\beta^2}{f_1(s)}\,\mathrm{d}s\right),\quad \mathrm{d}\tau=\exp\left(\int_0^x\frac{\delta-a\beta^2}{f_1(s)}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t.$$

系统(2)化为(仍以 x, y, t 记变量)

$$\begin{cases}\dot{x}=y-F(x),\\ \dot{y}=-g(x),\end{cases}\tag{3}$$

其中 $$g(x)=\exp\left(-2\int_0^x\frac{\delta-a\beta^2}{f_1(s)}\,\mathrm{d}s\right)\cdot\frac{n}{\beta}\cdot x\left(x+\frac{\beta}{n}\right)\cdot h_1(x)/f_1(x),$$

本文 1990 年 1 月 31 日收到. 1990 年 5 月 26 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

$$F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x,$$

$$f(x)=\exp\left(-\int_0^x\frac{\delta-a\beta^2}{f_1(s)}\mathrm{d}s\right)\cdot(-1)\cdot h_2(x)/f_1(x),$$

而
$$h_1(x)=-(a^2\beta^2-a\delta)x^2-(2a\beta^2+a)x-(\beta^2+\delta\beta+1),$$

$$h_2(x)=\left(x+\frac{\beta}{n}\right)\left[(a\beta^2+a\delta\beta-\beta-\delta)x+\frac{n}{\beta}\delta(\beta^2+\delta\beta+1)\right]$$

$$+\left[2a\delta\beta^2-\frac{a\beta^2}{n}-\frac{n}{\beta}\delta(\beta^2+\delta\beta+1)\right]\triangleq\left(x+\frac{\beta}{n}\right)\bar{h}_2(x)+\sigma x.$$

引理1 下述不等式成立:

1) $a^2\beta^2-a\delta>0$, $a\beta^2-\beta<0$; 2) $2a\beta^2-\beta-\delta<0$, $a\beta^2+a\delta\beta-\beta-\delta<0$.

证 由$\varphi\left(\frac{1}{a}\right)<0$知,$\beta<\frac{1}{a}$, 从而 $a\beta^2-\beta<0$. 其余不等式由$\delta<0$, $a<0$及β的定义即可证得.

引理2 若O外围的极限环由奇点S_1决定, 则 $\beta^2+\delta\beta+\frac{n}{1-n}<0$, 从而 $\sigma>0$.

证 记$\frac{1}{\lambda}$为方程$x^2+\delta x+\frac{n}{1-n}=0$的负实根. 令 $L=y-\lambda x-\frac{1}{n}$,则$L=0$为过点$N$且斜率为负的直线, $\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right|_{L=0}=\lambda^3\varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right)x^2$. 因 S_1 的两条分界线包向 O 点, 则$\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right|_{L=0}<0$. 故$\varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right)>0$. 可见, $\frac{1}{\lambda}<\beta$. 由$y=x^2+\delta x+\frac{n}{1-n}$的图形知,

$$\beta^2+\delta\beta+\frac{n}{1-n}<0.\ \text{因}\ \sigma=-\frac{\delta}{\beta}\cdot\frac{(1-n)^2}{n}\left[\beta^2+\delta\beta+\frac{n}{1-n}\right],$$

所以$\sigma>0$. 证毕.

现研究系统(3)的奇点.据引理1,$h_1(x)$为开口向下的抛物线,且与正x轴交于$x_1<x_2$.即$0<x_1<x_2$. 从而$g(x)$的零点为$x=0$, $-\frac{\beta}{n}$, x_1, x_2. 系统(3)的奇点为$O(0,0)$, $M\left(-\frac{\beta}{n},\right.$ $\left.F\left(-\frac{\beta}{n}\right)\right)$, $R_1(x_1, F(x_1))$, $R_2(x_2, F(x_2))$, 其中M和R_1为鞍点. $h_2(x)$亦为开口向下的抛物线,交正x轴于$\bar{x}_1<\bar{x}_2$. 由上述两引理,直接计算可知,如O外围的环由奇点S_1决定,则

$$h_1\left(-\frac{\beta}{n}\right)=-\frac{\beta^2}{n^2}(a^2\beta^2-a\delta)+\frac{\beta}{n}(2a\beta^2+a)-(\beta^2+\delta\beta+1)$$

$$=\left(\frac{1}{n}-1\right)\beta^2+\left(\frac{1}{n}-1\right)\delta\beta+a\beta+\frac{1}{n}a\beta\geqslant a\beta-1+\frac{1}{n}a\beta>0.$$

故有$x_1<-\frac{\beta}{n}<x_2$. 记$f_1(x)$的零点为 $\bar{x}=-(\beta^2+\delta\beta+1)/(2a\beta^2-\beta-\delta)>0$. 由于$O$外围的极限环不能位于$f(x)$常号的区域中,所以$\bar{x}_1<\bar{x}$. 同理, $\bar{x}_1<x_1$. 从而不难得到

引理3 如O外围的极限环由S_1决定,则

$$0<\bar{x}_1<x_1,\ x_1=\min\left(x_1,\bar{x},-\frac{\beta}{n},x_2,\bar{x}_2\right).$$

引理 4　给定系统

$$\dot{x} = y - F(x),\quad \dot{y} = -g(x), \tag{4}$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，$f(x), g(x)$ 在 (α_1, α_2) 中连续可微，$0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$。如果

1) $xg(x) > 0$，$x \neq 0$，$x \in (\alpha_1, \alpha_2)$，$g'(0) \neq 0$；

2) $f(x)$ 有单零点 $x_0 > 0$，当 $\alpha_1 < x < x_0$ 时，$f(x) < 0 (>0)$，当 $x_0 < x < \alpha_2$ 时，$f(x) > 0$ (<0)；

3) 在 $[0, x_0]$ 外，$(f(x)/g(x))' > 0$ (<0)，则系统(4)在带域 $\alpha_1 < x < \alpha_2$ 中至多存在一个环。

证　只要直接验证满足文献[3]中定理 2 的条件。

定理 2　对 $n > 1$，如果系统(1)在 O 外围的极限环由奇点 S_1 决定，则 O 外围至多存在一个极限环。

证　取 $\alpha_1 = -\infty$，$\alpha_2 = x_1$，$x_0 = \bar{x}_1$，验证引理 4 的三个条件。

由引理 3，条件 1)、2) 满足。在区间 $(-\infty, 0) \cup (\bar{x}_1, x_1)$ 上验证条件 3)。

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \exp\left(\int_0^x \frac{\delta - a\beta^2}{f_1(s)}\mathrm{d}s\right) \cdot \left(-\frac{\beta}{n}\right)\left[\frac{\bar{h}_2}{xh_1} + \frac{\sigma}{\left(x + \frac{\beta}{n}\right)h_1}\right],$$

记 $\phi(x) = -nf(x)/\beta g(x)$，则只要证 $\phi'(x) > 0$，对 $x \in (-\infty, 0) \cup (\bar{x}_1, x_1)$。

$$\phi'(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{\delta - a\beta^2}{f_1(s)}\mathrm{d}s\right)\left\{\frac{\delta - a\beta^2}{f_1(x)}\left[\frac{\bar{h}_2}{xh_1} + \frac{\sigma}{\left(x + \frac{\beta}{n}\right)h_1}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{xh_1\bar{h}_2' - h_1\bar{h}_2 - xh_1'\bar{h}_2}{x^2h_1^2} - \frac{\sigma\left[h_1 + \left(x + \frac{\beta}{n}\right)h_1'\right]}{\left(x + \frac{\beta}{n}\right)^2 h_1^2}\right\}$$

$$= \exp\left(\int_0^x \frac{\delta - a\beta^2}{f_1(s)}\mathrm{d}s\right)\left[\frac{\sigma}{\left(x + \frac{\beta}{n}\right)^2 h_1^2}\left(\frac{\left(x + \frac{\beta}{n}\right)u_1}{f_1} - h_1\right) + \frac{u_2}{x^2 f_1 h_1^2}\right],$$

其中

$$u_1(x) = (\delta - a\beta^2)h_1(x) - f_1(x)h_1'(x),$$

$$u_2(x) = (\delta - a\beta^2)xh_1(x)\bar{h}_2(x) - f_1(x)[xh_1(x)\bar{h}_2'(x) - (xh_1(x))'\bar{h}_2(x)]$$

$$- x\bar{h}_2(x)u_1(x) - \frac{n}{\beta}\delta(\beta^2 + \delta\beta + 1)f_1(x)h_1(x).$$

再化简，得到

$$\phi'(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{\delta - a\beta^2}{f_1(s)}\mathrm{d}s\right)\left[\frac{-\sigma}{\left(x + \frac{\beta}{n}\right)^2 h_1} + \frac{-\frac{n}{\beta}\delta(\beta^2 + \delta\beta + 1)}{x^2 h_1} + \frac{h_2 \cdot u_1(x)}{x\left(x + \frac{\beta}{n}\right)f_1 h_1^2}\right],$$

其中

$$u_1(x) = (\delta - a\beta^2)h_1(x) - f_1(x)h_1'(x).$$

对 $x\in(-\infty,0)\cup(\bar{x}_1,x_1)$，$x+\frac{\beta}{n}<0$，$f_1(x)<0$，$h_1(x)<0$，$xh_2(x)>0$。又$\sigma>0$。故只要证 $u_1(x)>0$。

$$u_1'(x)=(a\beta^2-\beta)h_1'(x)+2(a^2\beta^2-a\delta)f_1(x),$$

对 $x<x_1$，$h_1'(x)>0$，$f_1(x)<0$。而 $a\beta^2-\beta<0$，$a^2\beta^2-a\delta>0$，则 $u_1'(x)<0$。又 $u_1(x_1)=-f_1(x_1)h_1'(x_1)>0$，故 $u_1(x)>0$。所以 $\psi'(x)>0$，条件3)得到验证。据引理4，定理成立。证毕。

定理3 对 $n>1$，如系统(1)在O外围的极限环由奇点N决定，则对某些δ值，在O外围至少存在两个极限环。

证 当 $\delta=0$ 时，O为系统(1)的稳定细焦点。当δ从0减少时，O变为不稳定粗焦点，同时分枝出一个稳定极限环Γ_1且随δ减少而扩大。对系统(1)，

$$\sigma=P_x+Q_y=\delta(y-1)-x,$$

可见，$\sigma_N>0$。如O外围存在过N的鞍点分界线环Γ，则Γ必为内不稳定的。显然，Γ不可能由Γ_1扩大而成。只可能出现如下情形：在Γ_1扩大而未过鞍点N之前，分界线环Γ已经形成，当δ继续减少时，Γ_1破裂。由旋转向量场理论，此时 $W^s(N)$ 位于 $W^u(N)$ 内侧，从而产生另一极限环Γ_2。随着δ继续减少，Γ_1扩大，Γ_2缩小，然后重合为半稳定环而消失。总之，必存在某些δ值，使系统(1)在O外围至少出现两个环。证毕。

现在对O外围的环由S_1决定的情形来研究其变化情况。如前所述，当δ从0减少时，O外围跳出一稳定环且逐渐扩大，同时必与直线 $l_1: y=\frac{1}{\delta}x+1$ 相交。当δ再减少而等于$\frac{1}{a}$时，l_1与$l_2: 1+ax-y=0$重合。此时，系统(1)在区域 $\{(x,y): y<1,\ 1+ax-y>0\}$ 中不存在极限环和奇闭轨。所以，当 $\delta=\frac{1}{a}$ 时O外围的极限环早已消失。可见，O与S_1必位于l_1的异侧，故$\sigma_{S_1}<0$。如O外围存在过S_1的分界线环，必为内稳定的。据旋转向量场的理论，当δ减少时，环所遮盖的区域的外境界线上必有奇点。易见，l_2上的鞍点S_1必位于此境界线上。故当δ减少时，环逐渐扩大成为过S_1的分界线环，然后分界线环破裂，环消失。在这过程中，不会出现半稳定环，否则与定理2相违。总之，我们有

定理4 对 $n>1$，如系统(1)在O外围的极限环由奇点S_1决定，则存在 δ^*，$\max(-2,\frac{1}{a})<\delta^*<0$，使得 1) 当 $\delta^*<\delta<0$ 时，O外围存在唯一的极限环；2) 当 $\delta=\delta^*$ 时，O外围存在一条过鞍点S_1的同宿轨道；3) 当 $\delta<\delta^*$ 时，O外围不存在极限环。

致谢：导师叶彦谦教授仔细审阅了初稿，并提出修改意见，作者表示诚挚的谢意。

参 考 文 献

[1] 叶彦谦，极限环论，上海科技出版社，1984.
[2] 孙建华，科学通报，35(1990)，12:887—890.
[3] 曾宪武，中国科学，A辑，1982，1:14—20.