科学通报
第41卷 第6期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1996年3月

Poisson 方程 Robin 外问题的积分解*

于锦海 朱灼文** 操华胜
(郑州测绘学院基础部，郑州 450052) (武汉测绘科技大学地球科学与测量工程学院，武汉 430070)

关键词 非线性 Molodensky 问题 Poisson 方程 Robin 外问题 线性叠加原理 积分解

关于近年来才开始的非线性大地边值问题的研究，虽然在解的适定性方面已有若干成果[1~3]，但都无法用于实际．为了建立起便于实用的解理论，我们提出了一种新的解法[4~6]．在这种方法中，Poisson 方程的 Robin 外问题起关键作用，非线性边值问题被转化为线性边值问题序列的递推求解．本文研究与最具典型意义的非线性 Molodensky 问题相应的 Poisson 方程 Robin 外问题的积分解，即求扰动位 T 的积分表示，使满足

$$\begin{cases} \Delta T=-f, & \text{在 } \Omega\equiv\{P(r,\ \theta,\ \lambda);\ r>R\} \text{ 中}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial r}+\dfrac{2}{R}\,T=-q, & \text{在 } \Sigma\equiv\{P(r,\ \theta,\ \lambda);\ r=R\} \text{ 上}, \\ T=O\left(\dfrac{1}{r^3}\right), & r\to\infty, \end{cases} \tag{RP}$$

其中 Δ 为 Laplace 算子，R 为地球平均半径．

1 主要结果

定理 1.1 边值问题(RP)的解 T 可写成

$$T(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}S(P,\ Q)q(Q)\mathrm{d}\Sigma_Q+\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}S(P,\ Q)f(Q)\mathrm{d}\Omega_Q, \tag{1.1}$$

其中

$$S(P,\ Q)=\frac{1}{l}+\frac{R}{l_1}-\left(1-\frac{2R}{\rho}\right)\frac{1}{r}-\left(1+\frac{4R^2}{\rho^2}\right)\frac{R}{r^2}\cos\psi-\frac{3R}{r^2\rho^2}\left(l_1+R^2\cos\psi\ln\frac{r\rho-R^2\cos\psi+l_1}{2r\rho}\right), \tag{1.2}$$

ψ 为点 $P(r,\ \theta,\ \lambda)$ 与 $Q(\rho,\ \theta_Q,\ \lambda_Q)$ 相对于地心的夹角，$l=|\overrightarrow{PQ}|=(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\psi)^{\frac{1}{2}}$，$l_1=(r^2\rho^2+R^4-2R^2r\rho\cos\psi)^{\frac{1}{2}}$．

1995-04-26 收稿，1995-09-20 收修改稿
*国家自然科学基金资助项目
**联系人

2　定理 1.1 的证明

根据线性叠加原理，问题(RP)的解可分解为下列两个边值问题的解之和：

$$\begin{cases} \Delta T=0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial r}+\dfrac{2}{R}T=-q, & \text{在 } \Sigma \text{ 上}, \\ T=O\left(\dfrac{1}{r^3}\right), & r\to\infty \end{cases} \tag{SP}$$

与

$$\begin{cases} \Delta T=-f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial r}+\dfrac{2}{R}T=0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上}, \\ T=O\left(\dfrac{1}{r^3}\right), & r\to\infty. \end{cases} \tag{HP}$$

显然，问题(SP)的解可表示为 Stokes-Pizzetti 积分[7]. 实际上该积分就是(1.1)式中右端第一项，盖因当 $Q\in\Sigma$, 即 $\rho=R$ 时(1.2)式中的 $S(P,\ Q)$ 蜕化为通常所谓的 Stokes 核

$$S_0(P,\ Q)=S(P,\ Q)|_{\rho=R}=\frac{2}{l_0}+\frac{1}{r}-\frac{3l_0}{r^2}-\frac{R}{r^2}\cos\psi\left(5+3\ln\frac{r-R\cos\psi+l_0}{2r}\right), \tag{2.1}$$

此处 $l_0=l|_{\rho=R}=(r^2+R^2-2rR\cos\psi)^{\frac{1}{2}}$.

今考虑问题(HP)的求解.

引理 2.1　设 T 是问题(HP)的解，则函数 $F=\dfrac{1}{R}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}+2T\right)=\dfrac{1}{Rr}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2T)$ 满足边值问题

$$\begin{cases} \Delta F=-\dfrac{1}{R}\left[2f+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2f)\right], & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ F=0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上}, \\ F=O\left(\dfrac{1}{r^3}\right), & r\to\infty; \end{cases} \tag{2.2}$$

进而，F 可写成

$$F(P)=\frac{1}{R}\iiint_{\Omega}G(P,\ Q)\left[2f(Q)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2f(Q))\right]\mathrm{d}\Omega_Q, \tag{2.3}$$

式中

$$G(P,\ Q)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{l}-\frac{R}{l_1}\right]. \tag{2.4}$$

证 由 F 的定义及等式 $\Delta\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Delta T)$ 便知 F 满足(2.2)式; 又因(2.2)式是球域 Dirichlet 外问题, 故其解可写成(2.3)式, 其中 $G(P,\ Q)$ 为 Ω 上 Dirichlet 问题的 Green 函数.

引理 2.2 若函数 u 和 p 有性态 $u|_{\rho=R}=u|_{\rho\to\infty}=0$ 和 $p=O\left(\frac{1}{r^3}\right)$, 则成立着

$$\iiint_{\Omega}\frac{u}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 p)\mathrm{d}\Omega=-\iiint_{\Omega}p\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho u)\,\mathrm{d}\Omega. \tag{2.5}$$

证 将(2.5)式左端的积分写为

$$\iiint_{\Omega}\frac{u}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 p)\mathrm{d}\Omega=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}\Sigma\int_{R}^{\infty}\rho u\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 p)\mathrm{d}\rho. \tag{2.6}$$

对上式右端中的单积分用分部积分法, 并注意到 u 和 p 的性态, 便得(2.5)式.

引理 2.3 问题(HP)的解可写为

$$T(P)=\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}S(P,\ Q)f(Q)\mathrm{d}\Omega_Q, \tag{2.7}$$

此处 $S(P,\ Q)$ 由(1.2)式给出.

证 由于 $f(Q)=O\left(\frac{1}{\rho^3}\right)$ 和 $G(P,\ Q)|_{\rho=R}=G(P,\ Q)|_{\rho\to\infty}=0$, 故可按引理 2.2 的方式将(2.3)式右端第二项积分改化, 从而(2.3)式变成

$$F(P)=\frac{1}{R}\iiint_{\Omega}H(P,\ Q)f(Q)\mathrm{d}\Omega_Q, \tag{2.8}$$

其中

$$H(P,\ Q)=G(P,\ Q)-\rho\frac{\partial G}{\partial\rho}. \tag{2.9}$$

(2.8)式两端乘以 r 后再从 ∞ 到 r 进行积分, 得

$$r^2T=(r^2T)|_{\infty}^{r}=\iiint_{\Omega}H_1(P,\ Q)f(Q)\mathrm{d}\Omega_Q, \tag{2.10}$$

此处

$$H_1(P,\ Q)=\int_{\infty}^{r}rH(P,\ Q)\mathrm{d}r. \tag{2.11}$$

经推算, (2.9)式可写为

$$H(P,\ Q)=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{l}-\frac{R}{l_1}\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2-r^2}{l^3}-\frac{R(r^2\rho^2-R^4)}{l_1^3}\right]\right\}. \tag{2.12}$$

于是

$$H_1(P,\ Q)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{r^2}{l}+\frac{Rr^2}{l_1}-\frac{3Rl_1}{\rho^2}-\frac{3R^3\cos\psi}{\rho^2}\ln(r\rho-R^2\cos\psi+l_1)\right]\Bigg|_\infty^r; \tag{2.13}$$

但因上式右端在 ∞ 处具有如下性态:

$$\frac{1}{4\pi}\left[\left(1-\frac{2R}{\rho}\right)r+\left(1+\frac{4R^2}{\rho^2}\right)R\cos\psi-\frac{3R^3}{\rho^2}\cos\psi\ln(2r\rho)\right]+O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

故有

$$H_1(P,\ Q)=\frac{1}{4\pi}r^2S(P,\ Q). \tag{2.14}$$

将(2.14)代入(2.10)式,便得(HP)问题的积分解如(2.7)式.

至此,我们完成了定理 1.1 的证明.

参　考　文　献

1 Hörmander L. The boundary value problem of physical geodesy. Arch Rat Mech Anal, 1976, 62: 1～52

2 党诵诗,于锦海. 关于非线性 Molodensky 问题的解在 $H^{2+\varepsilon}$ 中的唯一性. 应用数学, 1993, 6(2): 183～185

3 Sansò F. Molodensky problem in gravity space: review of the first results. Bull Gèod, 1978, 52: 59～70

4 于锦海,党诵诗. 解算非线性 Molodensky 问题的高阶逼近方法. 测绘学报, 1992, 21(4): 249～258

5 于锦海,朱灼文. 非线性固定重力边值问题. 中国科学, B 辑, 1994, 24(3): 294～302

6 于锦海,朱灼文,操华胜. 部分边值固定的自由边值问题. 科学通报, 1995, 40(14): 1 301～1 303

7 Heiskanan W A, Moritz H. Physical Geodesy. San Francisco: W H Freeman, 1967