科学通报
第40卷 第14期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1995年7月

部分边界固定的自由边值问题*

于锦海 朱灼文 操华胜
(郑州测绘学院,郑州 450052) (中国科学院测量与地球物理研究所,武昌 430077)

关键词 卫星测高 扰动位 等价形式 高阶逼近 收敛性

若联合应用海洋上的卫星测高数据与陆地上的重力数据求解地球重力学主题,便出现一类新型大地边值问题——测高-重力问题. 这是一类属于非线性的部分边界固定的自由边值问题,迄今尚未有人研究过. 目前仅限于研究其线性化—— Laplace 方程混合边值问题[1~6]. 本文首次研究这类非线性问题,给出它的提法和具体解法,以适应精度突破线性化有效界限 $O(10^{-8})$ 的观测对求解地球重力学主题的挑战.

1 问题的提法

由于能以任意精度将重力场中的离心力场影响消去,故可从引力场出发提出问题[1]. 记地球表面为 $\sum=\sum_1\cup\sum_2,\sum_1\cap\sum_2=\phi$,其中 $\sum_1$ 为陆地部分,$\sum_2$ 为海洋部分之平均海水面. 引入正常椭球体,其引力位为 U,表面为 $S=S_1\cup S_2$,其中 S_i 是 S 上沿外法向对应于 $\sum_i$ 的那一部分. 设已由地面观测给出 $\sum_1$ 上的地球引力位 W 和引力向量 $\boldsymbol{G}$,由卫星测高得到 $\sum_2$ 的形状. 于是,部分边界固定的自由边值问题可以对扰动位 $T=W-U$ 提出如下问题:求 T 和 $\sum_1$ 的椭球高 $h^{(1)}=h|_{\Sigma_1}$,使满足

$$\begin{cases} \nabla^2 T(P)=0, & P\in\Omega^+, \\ T(P)=\Delta W-U(P)-U(Q), & P\in\Sigma_1, \\ \dfrac{\partial T}{\partial n}(P)=-\Delta G+\gamma(P)-\gamma(Q), & P\in\Sigma_1, \\ T(P)=\beta_2, & P\in\Sigma_2, \\ T(P)=O\left(\dfrac{1}{r}\right), & r\to\infty, \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω^+ 表示 Σ 的外部点域,∇^2 为 Laplace 微分算子,n 为 S 的外法向,$(P;Q)$ 为 Σ 与 S 上沿法向的对应点对,γ 为正常引力值,r 为点 P 的地心向径,β_2 为借卫星测高原理和 Bruns 定理由 Σ_2 的椭球高 $h^{(2)}=h|_{\Sigma_2}$ 导出的已知函数,ΔW 和 ΔG 为地面观测的导出量:$\Delta W=W(P)-W(Q)$,$\Delta G=-n_Q\cdot[G(P)-\gamma(Q)]$.

2 等价形式

取 $U=f\dfrac{M}{r}$ 和 $S: r=R=f\dfrac{M}{U_0}$,这里 f 为万有引力常数,M 为地球总质量,U_0 为大地水

1994-11-03 收稿,1995-03-06 收修改稿
*国家自然科学基金资助项目

1) 于锦海. 物理大地测量边值问题的理论. 理学博士学位论文,中国科学院测量与地球物理研究所(武昌),1992

准面上的引力位值. 作变换 $T \to T^*$:

$$T^*(r,\theta,\lambda) = T(r+h,\theta,\lambda), \tag{2}$$

此处(r,θ,λ)为球坐标系. 容易推得,在此变换下,问题(1)变为关于 T^* 的球域 Poisson 方程外问题:求 T^* 和 $h^{(1)}$,使满足

$$\begin{cases} \nabla^2 T^*(P) = F(T^*,h), & P\in\omega^* = \{P_j r > R\}, & (3.1)\\ T^*(Q) = \Delta W - \dfrac{fM}{R+h^{(1)}} + \dfrac{fM}{R}, & Q\in S_1, & (3.2)\\ \dfrac{\partial T^*}{\partial r}(Q) = -\Delta G + \dfrac{fM}{(R+h^{(1)})^2} - \dfrac{fM}{R^2}, & Q\in S_1, & (3.3)\\ T^*(Q) = \beta_2, & Q\in S_2, & (3.4)\\ T^*(P) = O\left(\dfrac{1}{r}\right), & r\to\infty, & (3.5) \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} F(T^*,h) = &-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2}\left[(h'_\theta)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(h'_\lambda)^2\right] + \\ &\frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial r\partial\theta}h'_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T^*}{\partial r\partial\lambda}h'_\lambda\right] + \\ &\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial T^*}{\partial r}h''_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial T^*}{\partial r}h''_\lambda + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial T^*}{\partial r}h'_\theta\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

显然,F 的量级为 $O(h^2)$. 问题(3)称为问题(1)的等价形式.

3 高阶逼近

分别对(3.2),(3.3)式中的 $\dfrac{1}{R+h^{(1)}}$ 和 $\dfrac{1}{(R+h^{(1)})^2}$ 作关于 $h^{(1)}$ 的 Tayler 展开至 $O((h^{(1)})^n)$. 若取 $n=1$,相应的 T^* 和 $h^{(1)}$ 记之以 T_1^* 和 $h_1^{(1)}$,并将此时的(3.2)和(3.3)式合并,则得 T_1^* 和 $h_1^{(1)}$ 所满足的方程如下:

$$\begin{cases} \nabla^2 T_1^*(P) = 0, & P\in\omega^+,\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{2}{R}\right)T_1^*(Q) = -\Delta G + \dfrac{2}{R}\Delta W, & Q\in S_1, \\ T^*(Q) = \beta_2, & Q\in S_2,\\ T_1^*(P) = O\left(\dfrac{1}{r}\right), & r\to\infty, \end{cases} \tag{5}$$

以及

$$h_1^{(1)} = \frac{R^2}{fM}[T_1^*|_{S_1} - \Delta W], \tag{6}$$

问题(5)称为一阶逼近问题. 显然,它是通常的 Laplace 方程混合边值问题. 这类问题的适定性、估计理论与解法,我们已作过详细研究[1,6]. 今假定已求出 $n-1$ 阶逼近问题的解 T^*_{n-1}. 如同上述所作,便可从(3)式导出关于 T^*_n 的 Poisson 方程混合边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 T^*_n(P)=F(T^*_{n-1},h_{n-1}), & P\in\omega^+, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{2}{R}\right)T^*_n(Q)=-\Delta G+\dfrac{2\Delta W}{R}+\dfrac{fM}{R^2}\sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^k(k-1)\left(\dfrac{h^{(1)}_{n-1}}{R}\right)^k, & Q\in S_1, \\ T^*_n(Q)=\beta_2, & Q\in S_2, \\ T_n(P)=O\left(\dfrac{1}{r}\right), & r\to\infty \end{cases} \tag{7}$$

以及

$$h^{(1)}_n=\frac{R^2}{fM}\left[T^*_n|_{S_1}-\Delta W+\frac{fM}{R^2}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\left(\frac{h^{(1)}_{n-1}}{R}\right)^k\right], \tag{8}$$

其中 $h_{n-1}=h^{(1)}_{n-1}$(在 S_1 上)或 $h^{(2)}$(在 S_2 上). 取函数 v: $\nabla^2 v=F$, 在 ω^+ 仍令 $t=T^*_n-v$, 便能从(7)得到形如(8)的关于 t 的 Laplace 方程混合边值问题. 解之得 t, 从而得 n 阶逼近解 $T^*_n=t+v$ 和 $h^{(1)}_n$.

4　收敛性

我们有关于高阶逼近的收敛性.

定理　不管 S_1 的形状如何, 若 $\mu=|S_1|/|S|\leqslant 20\%$, 则 $\{T^*_n\}$ 和 $\{h^{(1)}_n\}$ 为收敛序列: $T^*_n\to T^*$ (从而 $\to T$) 和 $h^{(1)}_n\to h^{(1)}$.

证明提示　由文献[1]知, $\mu\leqslant 20\%$ 是混合边值问题的适定性条件. 若取 Hölder 空间或 Sobolev 空间为基本空间,则利用 Schauder 估计或 L^p- 估计[1], 便可证明序列 $\{T^*_n\}$ 和 $\{h^{(1)}_n\}$ 在相应的基本空间中收敛于 T^*(从而 T) 和 $h^{(1)}$.

我们知道,对于任何收敛递推序列,其极限与初值选择无关,只要该初值属于该序列的收敛空间;收敛空间中的不同元素只能导致不同的收敛速度. 收敛性定理表明,所取的正常引力位 $U=f(M/r)$ 属于序列 $\{T^*_n\}$、$\{h^{(1)}_n\}$ 的收敛空间. 这意味着,它作为初值,使递推过程能以任意精度逼近问题的解. 在这个意义上,这种选择与通常在大地测量中的正常位选择是全然不同的两种概念.

参　考　文　献

1　朱灼文,于锦海. 扰动重力位混合边值问题的适定性和估计理论. 科学通报, 1995, 40(2): 154～157

2　Svensson S L. Solution of the Altimetry-Gravimetry problem. Bull Geod, 1983, 57: 332～352

3　Svensson S L. Some remarks on the Altimetry-Gravcmetry problem. Manu Geod, 1988, 13

4　Sanso F, Stokes B. A numerical experiment in the Altimetry-Gravimetry problem. Manu Geod, 1985, 10

5　Arnold K. The compatibility conditions, the uniqueness and the solution of the mixed boundary value problem of geodesy, Gerlands Beitr. Geophysik (Leipzig), 1985, 93(5): 339～355

6　于锦海,党诵诗. 混合边值问题的球谐函数有限逼近方法. 动力大地测量学进展,北京:地震出版社, 1991. 50～57