三维弱同宿吸引子的判别准则*

孙 建 华

(南京大学数学系,南京 210008)

关键词 三维系统、标准型、弱同宿吸引子

在高维系统中,同宿轨道往往导致非常复杂的定性结构,甚至混沌性态. 所以,高维系统的同宿轨道及其分支是动力系统分支理论中一个重要而又困难的研究课题. 几十年来,虽然这一课题已有一些进展,但迄今为止,如何判定高维同宿轨道的稳定性仍然是一个悬而未决的问题. 本文将对三维系统提供一个判别同宿轨道稳定性的解析准则.

为使问题精确化,我们给出下述

定义 1 弱吸引子(弱排斥子)是一个不可分解的闭不变集 L,满足如下性质: 给定 $\varepsilon>0$,在 L 的 ε-邻域中存在 Lebesgue 测度为正的集合 U,使得只要 $X\in U$,则 X 的 $\omega(\alpha)$ 极限集包含在 L 中,且 X 的前向(后向)轨道 $O^+(X)$ $(O^-(X))$ 包含在 U 中.

考虑自治系统

$$\dot{X}=F(X), \tag{1}$$

其中 $X\in\mathbf{R}^3$, $F:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为解析函数. 假设 (1) 是有过双曲鞍点 O 的同宿轨道

$$L_0=\{X_0(t):t\in\mathbf{R}\},$$

且 $DF(0)$ 的特征值为 $\lambda_i(i=1,2,3)$. 如 O 为鞍-集点,则 $\lambda_1=\lambda_2=\rho+i\omega$, $\lambda_3\in\mathbf{R}$; 如 O 为鞍-结点,则 $\lambda_i\in\mathbf{R}$ $(i=1,2,3)$. 我们研究 L_0 为 (1) 的弱吸引子或弱排斥子的判别准则.

定义 2 令 $\sigma_0=\mathrm{div}F(0)$. 如 $\sigma_0\neq 0$ $(\sigma_0=0)$,则称 O 为系统 (1) 的粗(细)鞍点.

我们首先研究系统 (1) 在 O 邻近的标准型.

命题 3 如 O 为 (1) 的细鞍-焦点或细鞍-结点且 λ_1/λ_2 为无理数,则在 O 的小邻域中 (1) 有如下标准型

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\rho x-\omega y+xf_1((x^2+y^2)z)-yf_2((x^2+y^2)z),\\ \dot{y}&=\omega x+\rho y+yf_1((x^2+y^2)z)+xf_2((x^2+y^2)z),\\ \dot{z}&=\lambda_3 z+zf_3((x^2+y^2)z)\end{aligned} \tag{2}$$

或

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\lambda_1 x+xf_1(xyz),\\ \dot{y}&=\lambda_2 y+yf_2(xyz),\\ \dot{z}&=\lambda_3 z+zf_3(xyz),\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $f_i(i=1,2,3)$ 为任意无常数项的多项式.

命题 4 设 $\sigma_0=0$,且 λ_1/λ_2+1,则在 O 的小邻域中 (1) 有如下标准型

1991-09-03 收稿, 1992-07-15 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda_1 x + y + x f_1(x^2 z),\\ \dot{y} &= \lambda_1 y + y f_1(x^2 z) + x f_2(x^2 z),\\ \dot{z} &= \lambda_3 z + z f_3(x^2 z),\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $f_i(i=1,2,3)$ 为任意无常数项的多项式.

命题 5 如 $\sigma_0=0$, $\lambda_1/\lambda_2=m/n$, $(m,n)=1$, $m/n\neq 1$, $m,n\in \mathbf{N}^+$, 则在 O 的小邻域中 (1) 有如下标准型

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda_1 x + x f_1(x^{m+n}z^m, y^{m+n}z^n),\\ \dot{y} &= \lambda_2 y + y f_2(x^{m+n}z^m, y^{m+n}z^n),\\ \dot{z} &= \lambda_3 z + z f_3(x^{m+n}z^m, y^{m+n}z^n),\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $f_i(i=1,2,3)$ 为任意无常数项的二元多项式.

命题 6 存在 $\mathbf{R}^3$ 全空间中的坐标变换, 把(1)变换为系统(*),使得(*)依据线性部分特征值的不同情形,在细鞍点 O 的小邻域中分别具有形式 (2)、(3)、(4) 或 (5).

我们略去以上诸命题的证明,并在下面不失一般性地假设 (1) 是有(*)的性质.

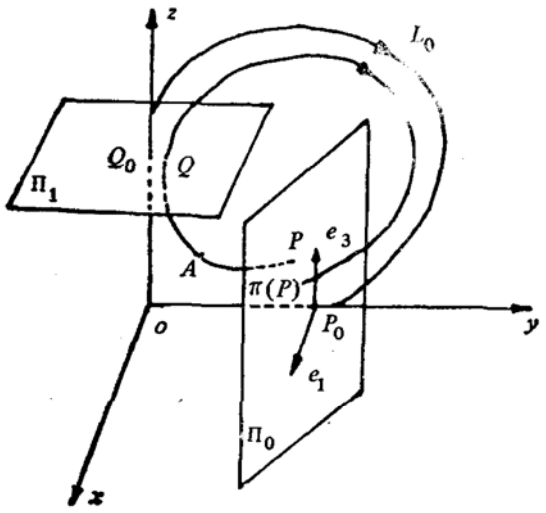


图 1

根据同宿轨道 L_0 的存在性, 我们可在 L_0 邻近建立系统(1)的 Poincaré 映射 Π. 如图 1 所示, 令 Π_0、Π_1 为 Poincaré 截面, $P=\alpha e_1+\delta e_3+P_0$, $\phi(t,P)$为(1)过 $P\in\Pi_0$ 的轨线,且经过时间 $\tau(P)$之后,再次交 Π_0 于 $\Pi(P)$点. 记 $\Pi(P)=\beta(\alpha,\delta)e_1+\eta(\alpha,\delta)e_3+P_0$, 则可证明

命题 7 设 $\phi(t,P)$ 为 (1) 的轨线,满足 $\phi(0,P)=P$, $\phi(\tau(P),P)=\Pi(P)$, 则

$$\det\left(\frac{\partial(\beta,\eta)}{\partial(\alpha,\delta)}\right)=\frac{1}{1+\varepsilon_1}\exp\left(\int_0^{\tau(P)}\mathrm{div}F(\phi(t,P))\mathrm{d}t\right), \tag{6}$$

其中当 $\alpha\to 0$, $\delta\to 0$ 时, $\varepsilon_1\to 0$.

命题 8 令 $\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{div}F(X_0(t))\mathrm{d}t$, 则 1) 当 $\sigma_0<0$ (>0) 时, $\sigma=-\infty(\infty)$; 2) 当 $\sigma_0=0$ 时, σ 为一有限数.

命题 9 令 $\bar{\sigma}=\int_0^{\tau(P)}\mathrm{div}F(\phi(t,P))\mathrm{d}t$, 则当 $P\to P_0$ 时, $\bar{\sigma}\to\sigma$.

利用命题 3—6 可以证明命题 7—9. 从略. 从命题 7—9, 可证

命题 10 令 $\alpha\to 0$, $\delta\to 0$, 则

1) 当 $\sigma_0<0(>0)$ 时, $\det\left(\frac{\partial(\beta,\eta)}{\partial(\alpha,\delta)}\right)\to 0(\infty)$; 2) 当 $\sigma_0=0$ 时, $\det\left(\frac{\partial(\beta,\eta)}{\partial(\alpha,\delta)}\right)\to e^{\sigma}$.

有了上面一系列的准备工作,我们可以证明本文的主要结果.

定理 11 设系统 (1) 具有过双曲鞍点 O 的同宿轨道 $L_0=\{X_0(t):t\in\mathbf{R}\}$. 令 $\sigma_0=$

$\mathrm{div}F(0)$, $\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{div}F(X_0(t))\mathrm{d}t$, 则当 $\sigma_0<0(>0)$ 或 $\sigma_0=0$ 且 $\sigma<0(>0)$ 时, L_0 为 (1) 的弱同宿吸引子(排斥子).

证 显然, Poincaré 映射

$$\Pi:(\alpha,\delta)\to(\beta(\alpha,\delta),\eta(\alpha,\delta))$$

的平凡不动点 $(\alpha,\delta)=(0,0)$ 对应于同宿轨道 L_0, 且 $\det D\Pi(0,0)=\det\left(\frac{\partial(\beta,\eta)}{\partial(\alpha,\delta)}\right)\Big|_{(0,0)}$. 从命题 10 可见,如 $\sigma_0<0$ 或 $\sigma_0=0$ 且 $\sigma<0$, 则在 Π 的定义域中存在集合 $V\subset\Pi_0$, 使得对所有的 $(\alpha,\delta)\in V$, 当 $n\to\infty$ 时,有 $\Pi^n(\alpha,\delta)\to(0,0)$. 因此,我们取定义 1 中的集合 U 为 $\bigcup_{t\geqslant 0}\phi(t,V)$. 可见,对所有 $X\in U$, X 点的前向轨道 $O^+(X)$ 包含在 U 中, 且 $\omega(X)\subset L_0$. 所以,如 $\sigma_0<0$ 或 $\sigma_0=0$ 且 $\sigma<0$, L_0 为 (1) 的弱同宿吸引子. 把 t 换为 $-t$, 可证得括号中的情形. 证毕.

现将上述结果应用于两个具体系统. 首先考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=ax+f(x,y,z),\\ \dot{y}&=2z-3z^2+\mu(y^2-z^2+z^3)(2y),\\ \dot{z}&=2y-\mu(y^2-z^2+z^3)(2z-3z^2),\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $f(0,y,z)=f_x(0,y,z)=0$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. 显然该系统存在过双曲鞍点 O 的同宿轨道 L_0. 经计算, $\sigma_0=a$. 故当 $a<0(>0)$ 时, L_0 为 (7) 的弱同宿吸引子(排斥子).

证明系统[6]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=x-2x^3+\alpha y+\beta x^2y-\nu yz,\\ \dot{z}&=-\gamma z+\delta x^2,\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $\nu=\pm 1$, 具有与 Lorenz 方程类似的传递吸引子. 还证明存在参数值

$$\eta_0=(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\delta_0,\nu),$$

其中 $\delta_0<1/\sqrt{2}$, $\beta_0>0$, $\gamma_0=\frac{\alpha_0}{2}+\left(1+\frac{1}{4}\alpha_0^2\right)^{1/2}$ 以及 $\delta_0>0$ 充分小,且满足

$$\lambda_{ss}(\eta_0)-\lambda_s(\eta_0)+\lambda_u(\eta_0)<0,$$

使得系统 (8) 存在一对过 O 点的同宿轨道. 显然, 对 $\eta=\eta_0$, $\sigma_0=\lambda_{ss}+\lambda_s+\lambda_u<0$, 则这一对同宿轨道为 (8) 的弱同宿吸引子.

参 考 文 献

[1] Andronov, A. A. et al., *Theory of Dynamic Systems on a Plane*, Wiley, New York, 1973.

[2] Guckenheimer, J., Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[3] Van der Meer, J. C., *Cel. Mech.*, 27(1982), 131—149.

[4] Elphick, C. et al., *Physica D*, 29(1987), 95—117.

[5] Chow Shuinee, Hale, K. J., *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[6] Robinson, C., *Nonlinearity*, 2(1989), 495—518.