均匀引力场中的热平衡和磁静力平衡

王　水
（中国科学技术大学）

均匀引力场中等离子体的磁静力平衡方程，在太阳物理学中得到了广泛的应用. 太阳大气中的很多现象，例如太阳黑子、宁静日珥以及色球层和日冕中的某些结构，常常能够维持几小时到若干天的时间[1,2]，因此，一般可以采用磁静力平衡模式近似处理. 磁静力平衡方程是

$$\frac{1}{4\pi}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} - \nabla p - \rho g \boldsymbol{i}_z = 0, \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{B}$ 是磁感应强度，p 和 ρ 分别为等离子体的压力和密度；g 是均匀的重力加速度，它指向直角坐标系中 $-\boldsymbol{i}_z$ 的方向. 压力 p 和密度 ρ 遵从理想气体的状态方程

$$p = \rho k T / m, \tag{2}$$

式中 m 是等离子体的平均分子质量，k 是 Boltzmann 常数，T 是温度. 在温度分布为已知的情况下，方程 (1) 和 (2)，再加上 Maxwell 方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{3}$$

构成了均匀引力场中的磁流体静力学平衡方程组.

一些作者首先讨论了温度 T 为常数的简单情况；对于二维问题，方程组 (1)—(3) 可以简化为一个因变量的偏微分方程[3]. Low 讨论了均匀引力场中二维非等温的磁静力平衡[4]. 他应用巧妙的数学变换，最后得到一个非线性的椭圆型偏微分方程

$$\nabla^2 F + \frac{\partial}{\partial F}\left\{\frac{1}{2}\gamma[G(F)]^2 + \beta P_0(F)\exp\left[-\int_0^Z \frac{dZ'}{\theta(F, Z')}\right]\right\} = 0, \tag{4}$$

式中 F、G、θ、γ、β 和 Z 等，都是一些无量纲参数

$$\begin{aligned} &Y = hy, \quad Z = hz, \quad h = mg/kT_0, \\ &A(y, z) = A_0 F(Y, Z), \quad B(y, z) = B_0 G(Y, Z), \\ &p(y, z) = p_0 P(Y, Z), \quad T(y, z) = T_0 \theta(Y, Z), \\ &\beta = 4\pi p_0 / h^2 A_0^2, \qquad \gamma = B_0^2 / h^2 A_0^2 \end{aligned} \tag{5}$$

和

$$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{i}_x + \frac{\partial A}{\partial z}\boldsymbol{i}_y - \frac{\partial A}{\partial y}\boldsymbol{i}_z, \tag{6}$$

而 A_0、B_0、p_0、T_0 都是常数，$P_0(F)$ 是无量纲压力 $P(Y, Z)$ 的系数：

$$P(Y,Z) \equiv P(F,Z) = P_0(F)\exp\left[-\int_0^Z \frac{dZ'}{\theta(F,Z')}\right]. \tag{7}$$

如果知道 $G(F)$、$P_0(F)$ 和 $\theta(F, Z)$ 的函数形式，则由方程 (4) 可以求得标量函数 $F(Y, Z)$，随后即可求出密度、压力和磁场的分布[4].

本文 1981 年 6 月 15 日收到.

在以上的讨论中，没有用到能量方程．因此，对于 $\theta(F, Z)$ 的选取，具有很大的任意性．例如，对于宁静日珥片模式，曾取[5]

$$F(Y,Z) = \lambda^{-1}[-Z + \psi(Y)], \quad \theta = \alpha\psi^{2/7}, \tag{8}$$

式中 λ 和 α 是常数．但是，在非等温情况下，热传导过程必然出现．在真实的太阳大气中，热传导、辐射损失、热源加热(如波动耗散所引起的加热)等能量过程，都是十分重要的．因此，θ 的函数形式不宜任意选取，而必须要考虑到热平衡和磁静力平衡之间的自洽．有些作者已经注意到这个问题，并讨论过一种最简单的一维情况[6,7]．下面，我们将导出一般情况下温度场和磁场之间的耦合方程，将该方程与方程 (4) 联立求解，即可得到均匀引力场中热平衡和磁静力平衡的自洽解．

在存在磁场 $\boldsymbol{B}$ 的情况下，热传导一般近似视为沿着磁力线方向．则当考虑热传导、辐射损失和热源加热时，热平衡方程可以写成：

$$\nabla \cdot \left[\kappa(T)(\boldsymbol{B}\cdot\nabla T)\frac{\boldsymbol{B}}{B^2}\right] = R - S, \tag{9}$$

式中 $\kappa(T)$ 是热传导系数，对于 Lorentz 气体有

$$\kappa = \kappa^* T^{5/2}, \tag{10}$$

κ^* 为常数，R 和 S 分别表示辐射损失和热源加热．对光学薄的等离子体，R 可近似表达为

$$R = \alpha_0 \rho^2 T, \tag{11}$$

α_0 为常系数．S 的形式较难给定，对于波动耗散所引起的加热，可以假定 S 与密度 ρ 成正比：

$$S = \delta_0 \rho, \tag{12}$$

式中 δ_0 也是常系数．在二维情况下，利用方程 (5) 和 (6)，可将 (9) 式改写为

$$h^2 A_0 \frac{\partial(Q,F)}{\partial(Y,Z)} = R - S, \tag{13}$$

式中

$$Q = \frac{\kappa^* T_0^{7/2}\theta^{5/2}}{A_0\left[\gamma^2 G^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2\right]} \quad \frac{\partial(\theta,F)}{\partial(Y,Z)}. \tag{14}$$

当给定 $F(Y, Z)$ 函数形式时，其它因变量皆可视为 $F(Y, Z)$ 和 Z 的函数．则方程 (13) 可以变换为下列形式

$$\kappa^* h^2 T_0^{7/2} \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{\theta^{5/2}\frac{\partial\theta}{\partial Z}\frac{\partial F}{\partial Y}}{\gamma^2 G^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2}\right] = R - S. \tag{15}$$

利用 (2)、(7)、(11) 和 (12) 式，对方程 (15) 右端作进一步变换，最后热平衡方程 (9) 变为

$$\theta\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{\theta^{5/2}\frac{\partial\theta}{\partial Z}\frac{\partial F}{\partial Y}}{\gamma^2 G^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2}\right]$$

$$= \alpha^* P_0^2(F)\exp\left[-2\int_0^Z \frac{dZ'}{\theta(F,Z')}\right] - \delta^* P_0(F)\exp\left[-\int_0^Z \frac{dZ'}{\theta(F,Z')}\right], \tag{16}$$

式中

$$\alpha^* = \frac{\alpha_0 m^2 p_0^2}{\kappa^* k^2 h^2 T_0^{9/2}}, \quad \delta^* = \frac{\delta_0 m p_0}{\kappa^* k h^2 T_0^{9/2}}. \tag{17}$$

可以看出，方程 (16) 是包含有 θ 和 F 的非线性偏微分方程；因而对方程 (4) 中 θ 函数形式的选择，并不是任意的，它必须满足方程 (16) 的限制. 将方程 (4) 和 (16) 联立求解，即可得到均匀引力场中二维情况下等离子体热平衡和磁静力平衡的自洽解. 在 F 和 θ 求出以后，不难得到其它参量的表达式

$$p(y,z) = p_0 P_0[F(Y,Z)]\exp\left\{-\int_0^Z \frac{dZ'}{\theta[F(Y,Z'),Z']}\right\},$$

$$T(y,z) = T_0\theta[F(Y,Z),Z],$$

$$\rho(y,z) = \rho_0\theta[F(Y,Z),Z]^{-1} \times P_0[F(Y,Z)]\exp\left\{-\int_0^Z \frac{dZ'}{\theta[F(Y,Z'),Z']}\right\},$$

$$\boldsymbol{B}(y,z) = A_0 h\left\{\gamma^{\frac{1}{2}} G[F(Y,Z)]\boldsymbol{i}_x + \frac{\partial F}{\partial Z}\boldsymbol{i}_y - \frac{\partial F}{\partial Y}\boldsymbol{i}_z\right\}, \tag{18}$$

式中 $$\rho_0 = mp_0/kT_0.$$

当然，严格求解方程 (4) 和 (16)，是十分困难而复杂的；但可结合具体物理问题，讨论一些比较简单的情况. Low 和 Wu 处理的一维日珥片模式[7]，就是方程 (16) 的一个最简单的特例. 对于各参量仅随 Y 变化的一维情况，(6) 式可以写成

$$\boldsymbol{B}(Y) = B_0[G_0\boldsymbol{i}_x + \boldsymbol{i}_y + H(Y)\boldsymbol{i}_z], \tag{19}$$

式中 G_0 为常数，且 $\gamma = 1$. 不难看出，现在有

$$F(Y,Z) = Z - \int H(Y)dY. \tag{20}$$

将上式代入方程 (15) 后，得到

$$\kappa^*\left(\frac{mg}{kT_0}\right)^2 T_0^{7/2}\frac{d}{dY}\left(\frac{\theta^{5/2}}{1+G_0^2+H^2}\frac{d\theta}{dY}\right) = R - S. \tag{21}$$

进一步利用 (11)、(12) 及 (2) 式，再考虑到下列对称边界条件

$$\text{在 } Y = 0 \text{ 处}, \quad P = 1, \quad \theta = \theta_1, \quad H = 0, \quad \frac{d\theta}{dY} = 0, \tag{22}$$

式中 θ_1 为常数；可解出处于热平衡和磁静力平衡时宁静日珥中温度、压力、密度及磁场的分布.

研究等离子体热平衡和磁静力平衡的自洽解，在太阳物理和天体物理中是十分有意义的. 辐射损失，不仅是太阳和天体中的重要物理过程，而且也是目前对它们进行观测的主要手段. 因此，避开能量方程，而仅讨论磁静力平衡，往往会与实际情况有较大的偏差. 然而，方程 (4) 和 (15) 或方程 (16)，都是非线性的偏微分方程，一般只能用数值法求解.

致谢：作者感谢美国 Alabama 大学吴式灿 (S.T.Wu) 教授的有益讨论.

参 考 文 献

[1] Tandberg-Hanssen, E., *Solar Activity*, Waltham, Mass: Blaisdell, 1967.
[2] Tandberg-Hanssen, E., *Prominence*, Dordrecht: Reidel, 1974.
[3] Brown, A., *Ap. J.*, **128**(1958), 646.
[4] Low, B. C., *Ap. J.*, **197**(1975), 251.
[5] Low, B. C., *Ap. J.*, **198**(1975), 211.
[6] Lerche, I. & Low, B. C., *Solar Phys.*, **53**(1977), 385.
[7] Low, B. C. & Wu, S. T., *Ap. J.* (in Press), 1981.