流动稳定性弱非线性理论中幅值方程的一个必要的修正*

周　恒
(天津大学力学系,天津 300072)

关键词　幅值方程、弱非线性理论

一、幅值方程的重新检验

弱非线性理论中的 Landau-Stuart 型幅值方程已广泛被用于流动稳定性及其它领域. 但细心考察就可发现在边界层流及平面 Poiseuille 流的转捩问题中，这种幅值方程可能给出与实验不一致的结果. 本文将建议采用一种新的幅值方程.

为便于讨论,我们取二维平行流问题作为例子. 其中 Navier-Stokes 方程及连续方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \frac{1}{R}\nabla^2\boldsymbol{u}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{u} = \{u,v\}^T$ 是流速，u，v 为 $\boldsymbol{u}$ 在直角坐标 x，y 向的分量，t 为时间，p 为压力，∇ 为梯度算子，∇^2 为 Laplace 算子,R 为 Reynolds 数,所有的量均已适当无量纲化.

对弱非线性理论，通常设解可展成某一小参数的级数. 例如，若取基波幅值 a 作为小参数,则可以写

$$\{\boldsymbol{u},p\}^T = \{\boldsymbol{u}_0,p_0\}^T + a\{\boldsymbol{u}_1,p_1\}^T + a^2\{\boldsymbol{u}_2,p_2\}^T + \cdots, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{u}_0 = \{u_0,0\}^T$，$p_0$ 是基本层流解，$\boldsymbol{u}_1$ 为线性化扰动问题的解,应适当规一化.

一般我们设

$$\{\boldsymbol{u}_1,p_1\}^T = \{\hat{\boldsymbol{u}}_1(y),\hat{p}_1(y)\}^T e^{i(\alpha x-\omega t)} + C.C., \text{ 且令 } \alpha x - \omega t \equiv \theta, \tag{3}$$

依赖于我们取时间模式还是空间模式，α 或 ω 可设为已知实数，另一数则和 $\hat{\boldsymbol{u}}_1$，$\hat{p}_1$ 一起由求解一特征值问题而得到. 以下取时间模式作为例子.

根据弱非线性理论，a 和 θ 将满足下列 Landau-Stuart 型的方程:

$$\frac{da}{dt} = \omega_i a + A_3 a^3 + A_5 a^5 + \cdots, \tag{4}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega_r + B_2 a^2 + B_4 a^4 + \cdots, \tag{5}$$

其中 ω_r 及 ω_i 分别为 ω 的实部及虚部，A_i 及 B_i 等则在求解过程中，通过某种条件确定. 常用的是所谓的可解性条件. 现设流场对 x 而言是周期性的,周期为 $2\pi/\alpha$，则任何具有这种周期并满足连续方程及边界条件的速度场,都可成为一个真实流动的初始流场. 显见这类流场与弱非线性理论给出的速度场(2)一般是不一致的.

本文 1989 年 12 月 12 日收到.
* 国家自然科学基金资助项目.

即使我们假设初始速度及压力场为

$$\{u,p\}^T = \{u_0,p_0\}^T + a\{u_1,p_1\}^T \tag{6}$$

(显见这是可以的,因为它满足连续方程及边界条件),则为了解(2)、(4)、(5)式成立,(2)式中自 a^2 项始的诸项必须假设为一瞬间即被激发出来,而这在一真实流动,例如在一项实验中,从能量传输的观点看是不可能的. 如果我们考察 Kachanov 实验[1]中的数据,在不同地方的二次谐波的大小总比我们用弱非线性理论从已知 a 的情况下算出的值小得多.

二、幅值方程的新形式

在一真实问题,例如在 Nishioka 等人[2]或 Kachanov[1] 的实验中,在初始段并不存在谐波. 因此谐波是由非线性作用逐步激发的. 因此,我们应给每一谐波以一独立的幅值,然后导出它们各自满足的方程,以考虑它们的激发过程.

按照 Stuart[3] 或 Zhou[5], 在弱非线性理论的框架中,可以写

$$\begin{aligned}\{u_2,p_2\}^T &= \{\hat{u}_{20}(y),\hat{p}_{20}(y)\}^T e^{-2\theta_i} + \{\hat{u}_{22}(y),\hat{p}_{22}(y)\}^T e^{2i\theta} \\ &= \{u_{20},p_{20}\}^T + \{u_{22},p_{22}\}^T,\end{aligned} \tag{7}$$

其中右端第一项中出现 θ_i 是因为线性化问题导至的特征值问题可能不对应于中性情况,否则应该有 $\theta_i = 0$. 由于 u_2 的幅值不一定正比于 a^2, 故(2)式右端第 3 项实应写成

$$b_{20}\{\hat{u}_{20},\hat{p}_{20}\}^T e^{-2\theta_i} + b_{22}\{\hat{u}_{22},\hat{p}_{22}\}^T e^{2i\theta}. \tag{8}$$

按照摄动法, u_{20} 等满足的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_{20}}{\partial t} + u_0\dfrac{\partial u_{20}}{\partial x} + v_{20}\dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \nabla p_{20} - \dfrac{1}{R}\nabla^2 u_{20} = -2\mathrm{Re}[(u_1\cdot\nabla)u_1^*], \\ \nabla\cdot u_{20} = 0.\end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_{22}}{\partial t} + u_0\dfrac{\partial u_{22}}{\partial x} + v_{22}\dfrac{du_0}{dy} + \nabla p_{22} - \dfrac{1}{R}\nabla^2 u_{22} = -2\,\mathrm{Re}[(u_1\cdot\nabla)u_1], \\ \nabla\cdot u_{22} = 0,\end{cases} \tag{10}$$

其中 * 表示取共轭数, Re 表示取实数部分.

但实际计算 $\hat{u}_{20}$ 等的方程按 Zhou[5] 的写法为

$$\begin{cases}2\omega_i\hat{u}_{20} - \dfrac{1}{R}\dfrac{d^2\hat{u}_{20}}{dy^2} = -2\,\mathrm{Re}\left(\hat{v}_1\dfrac{d\hat{u}_1^*}{dy}\right), \\ \hat{v}_{20} = 0,\end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases}-2i\omega\hat{u}_{22} + 2i\alpha u_0\hat{u}_{22} + \hat{v}_{22}\dfrac{du_0}{dy} + \left\{2i\alpha,\ \dfrac{d}{dy}\right\}^T\hat{p}_{22} - \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{d^2}{dy^2} - 4\alpha^2\right)\hat{u}_{22} \\ \qquad = -2\,\mathrm{Re}\left[\left(i\alpha\hat{u}_1 + \hat{v}_1\dfrac{d}{dy}\right)\hat{u}_1\right], \\ \left\{2i\alpha,\ \dfrac{d}{dy}\right\}\hat{u}_{22} = 0.\end{cases} \tag{12}$$

而若我们令 u_{20} 等的幅值为 a^2, 就回到原来的弱非线性理论.

如上所述, $\hat{u}_{20}$ 等应有各自独立的幅值. 但我们设其速度分布形状可借用弱非线性理论的结果. 于是,下式可用以替代(2)式右端的第三项.

$$b_{20}(t)\{\hat{u}_{20}(y),\hat{p}_{20}(y)\}^T + b_{22}(t)\{\hat{u}_{22}(y),\hat{p}_{22}(y)\}^T, \tag{13}$$

其中形状已知而幅值 b_{20} 及 b_{22} 则为时间 t 的一慢变函数，如同 a 那样。

将(13)式中第一项代入(9)式，用 $b_{20}\hat{u}_{20}^*$ 点乘之并积分，按通常推导能量方程的步骤可得

$$\frac{db_{20}}{dt} = B_{01}b_{20} + B_{02}a^2, \tag{14}$$

同样方法可导出 b_{22} 的方程

$$\frac{db_{22}}{dt} = B_{21}b_{22} + B_{22}a^2, \tag{15}$$

而且考虑到(11)、(12)式，还可证明

$$B_{01} + B_{02} = B_{21} + B_{22} = 2\omega_i. \tag{16}$$

如继续往下做一步，将得到下列方程以取代原来的 Landau-Stuart 方程(4)

$$\frac{da}{dt} = \omega_i a + (A_{31}b_{20} + A_{32}b_{22})a \tag{17}$$

及一确定 θ 的方程。到这一阶为止，我们应有三个幅值方程(14)、(15)、(17)以取代(4)式。

易见上述步骤可继续下去，同时将有越来越多的谐波及其幅值演化方程。

三、若干分析的结论

方程(14)、(15)及(17)在令其右端为零时可用于求平衡态。这里我们注意到若在(17)式中令 $b_{20} = b_{22} = a^2$，则恢复到原来的 Landau-Stuart 方程，但根据(16)式，当 $b_{20} = b_{22} = a^2$ 时，$db_{20}/dt \neq 0$，$db_{22}/dt \neq 0$。因此除非 $\omega_i = 0$，否则由(14)、(15)、(17)式确定的平衡态将和原来的 Landau-Stuart 方程确定的不同。由于原来的 Landau-Stuart 方程是现在形式的一个特例，(14)、(15)式是在形状假定下由能量法求得的，而形状假设对原来的弱非线性理论显然是对的，因而第一个结论就是对弱非线性理论来说，只有其线性问题对应于中性情况，如 Stuart[3] 或 Watson[4] 所做，或如 Zhou[5] 人为造成的那样，才能得到从分析角度和能量角度来说互为相容的解。一旦平衡态确定后，不难用小扰动理论研究其稳定性.对若干具体例子试算的结果表明，平衡态的稳定性与原来 Landau-Stuart 形式所导出的稳定性结论相同，所试算的例子中既有超临界的，也有亚临界的。

我们还用(15)式试算了 Kachanov 实验中二次谐波的演化过程，其中的 a 取自实验数据。Kachanov 的振动条位于 $x = 250$ mm 处，因而我们设二次谐波的幅值在该处为零。我们计算了(15)式的系数，然后用数值积分求二次谐波幅值 b_{22}。我们发现结果与实验值相比直至 $x=350$mm 处符合得很不错。

我们没有继续往下算，因为在 $x = 350$ mm 处，实测的二次谐波形状已有扭曲。

致谢：作者在 1989 年访问美国 Brown 大学时，曾与 J. T. C. Liu 教授及同时正在该校访问的 J. T. Stuart 教授进行过有益的讨论，在此致谢。

参 考 文 献

[1] Kachanov, Yu. S., *J. F. M.*, **184**(1987), 43—74.
[2] Nishioka, M., Iida, S. & Ichikawa, Y., *J. F. M.*, **72**(1975), 731—751.
[3] Stuart, J. T., *J. F. M.*, **9**(1960), 353—370.
[4] Watson, J., *J. F. M.*, **9**(1960), 371—389.
[5] Zhou, H., *Pro. Roy. Soc. Lond.*, **A381**(1982), 407—418.