无穷可分分布成为绝对连续的一个充分条件

苏 淳　　白志东
（中国科学技术大学研究生院）

一、引　言

如所周知，无穷可分分布 $F(x)$ 的特征函数可表示为：

$$\phi(t)=\exp\left\{irt-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)\right\},\qquad(1.1)$$

其中积分 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 不包括原点，r、$\sigma^2\geqslant 0$ 为实常数，$G(x)$ 是一个非降有界函数，称为 $F(x)$ 的 Levy-Хинчин 谱函数.

一个有兴趣的问题是：在 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的 Lebesgue 性状间存在怎样的关系呢？四十年来，人们进行了不少讨论. 当 $G(x)$ 为绝对连续时，这一问题已获圆满解决. 但使 $F(x)$ 成为绝对连续的条件问题，却仍未彻底解决. 1965 年，Tucker 在文献[1]中，曾给出这样一个枚举性定理：

Tucker 定理　无穷可分分布 $F(x)$ 成为绝对连续，当且仅当，下列五条件之一成立：(i) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2}dG_{ac}(x)=\infty$；(ii) $\sigma^2>0$；(iii) $F^{(d)}$ 绝对连续；(iv) $F^{(cs)}$ 绝对连续；(v) $F^{(d)}$ 奇异连续，$F^{(cs)}$ 连续但非绝对连续，而 $F^{(d)}*F^{(cs)}$ 绝对连续.

这里，我们用 G_{ac}、G_d、G_{cs} 分别表示 Levy-Хинчин 谱函数 $G(x)$ 的绝对连续、离散、奇异连续部分；用 $F^{(ac)}$、$F^{(d)}$、$F^{(cs)}$ 分别表示以 G_{ac}、G_d、G_{cs} 为其 Levy-Хинчин 谱函数的无穷可分分布.

值得注意的是，Tucker 在文献[1]中仅仅通过举例说明了(iii)、(iv)、(v)的可能性，而没有给出使之成为可能的条件. 1942 年，Hartman 与 Wintner[2] 曾给出过一个这样的充分条件："如果存在一个 $0<r<2$，使 $\int_{-1}^{1}|x|^{-r}dG(x)=\infty$，则 $F(x)$ 绝对连续."作者发现这是一个错误的结论，本文定理 2 表明，对任何 $0<r<2$，都存在反例. 这些反例说明，使 $F(x)$ 成为绝对连续，不仅取决于 $G(x)$ 在原点附近的变化速度，而且也取决于它在原点附近谱点的分布性状. 本文兼顾两者，首次给出了 $F^{(d)}$ 成为绝对连续的一个充分条件.

为方便计，设 $G(x)$ 为纯粹跳跃函数，它的跳点集合为 $\{a_j,\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，其中 $a_0>0$，$a_j>0$，$a_{-j}<0$，$j=1,2,\cdots$. 设它在 a_j 的跃度为 $q_j>0$，记 $\frac{1+a_j^2}{a_j^2}q_j=\lambda_j>0$，于是(1.1)式化为：

本文 1980 年 6 月 10 日收到.

$$\phi(t)=\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\left(e^{ita_j}-1-\frac{ita_j}{1+a_j^2}\right)\right\},\tag{1.2}$$

其中 $\sum\limits_{j:|a_j|\leqslant 1}a_j^2\lambda_j<\infty$，$\sum\limits_{j:|a_j|>1}\lambda_j<\infty$．并已令 $r=0$，$\sigma^2=0$．

本文定理 1 给出 $\{a_j\}$ 与 $\{\lambda_j\}$ 使 $F(x)$ 成为绝对连续所具备的条件．

二、几个引理

设 $a_1>a_2>\cdots>0$，$a=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$，记 $b_j=\sum\limits_{k=j+1}^{\infty}a_k$，如果对每个 j，有 $a_j\geqslant b_j$，则不难知 $\lim\limits_{j\to\infty}2^jb_j$ 存在．事实上，对每个 j，有 $b_{j+1}+a_{j+1}=b_j$，而 $0<b_{j+1}\leqslant a_{j+1}$，故 $0<b_{j+1}\leqslant\frac{1}{2}b_j$，即 $0<2^{j+1}b_{j+1}\leqslant 2^jb_j$，说明 $\{2^jb_j\}$ 是一个单调非增有下界的序列，所以极限 $\lim\limits_{j\to\infty}2^jb_j$ 存在．

引理 1　设 $\{a_j\}$ 是一个具备上述性质的正数序列，$\lim\limits_{j\to\infty}2^jb_j=2r>0$．　设 $X_1, X_2, \cdots$ 为一列独立同分布的随机变数，$P(X_k=0)=P(X_k=1)=\frac{1}{2}$，$k=1, 2, \cdots$．　设 $Z=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kX_k$，$F$ 为 Z 的分布，则 F 绝对连续．

证　　任给区间 $(\alpha, \beta)\subset[0, \infty)$，无妨 $\beta-\alpha>0$ 足够小．$\because\lim\limits_{j\to\infty}2^jb_j=2r>0$，$\therefore$ 存在 j_0，使

$$\frac{r}{2^{j_0+1}}<\beta-\alpha<\frac{r}{2^{j_0}},\quad 并且\ b_{j_0}>\frac{r}{2^{j_0}}.$$

令

$$A_{j_0}=\left\{\sum_{k=1}^{j_0}\delta_ka_k,\ \delta_k=0\ 或\ 1;\ k=1, 2, \cdots, j_0\right\},$$

则 A_{j_0} 是一个由 2^{j_0} 个元素构成的有限集合．记

$C_n=\sum\limits_{k=1}^{j_0}\delta_k^{(n)}a_k$，其中 $\delta_1^{(n)}\delta_2^{(n)}\cdots\delta_{j_0}^{(n)}$ 为 n 的二进制表示，$n=0, 1, \cdots, 2^{j_0}-1$．于是有 $0=C_0<C_1<\cdots<C_{2^{j_0}-1}$．令 $Z_{j_0}=\sum\limits_{k=1}^{j_0}a_kX_k$，则 $P\{Z_{j_0}=C_n\}=\frac{1}{2^{j_0}}$，$n=0, 1, \cdots, 2^{j_0}-1$．令 $\tilde{Z}_{j_0}=\sum\limits_{k=j_0+1}^{\infty}a_kX_k$，则 $P\{\tilde{Z}_{j_0}\in[0, b_{j_0}]\}=1$．注意到，对一切 j，有 $a_j\geqslant b_j$，故知

$$C_n+b_{j_0}\leqslant C_{n+1},\quad n=0, 1, \cdots, 2^{j_0}-2.$$

于是由 j_0 的选取方式立知：区间 (α, β) 必落在某个区间 $[C_{n_0}, C_{n_0+2}]$ 中，所以

$$\begin{aligned}F\{(\alpha, \beta)\}&\leqslant F\{[C_{n_0}, C_{n_0+2}]\}=P\{Z_{j_0}=C_{n_0}, \tilde{Z}_{j_0}\in[0, b_{j_0}]\}+P\{Z_{j_0}\\&=C_{n_0+1}, \tilde{Z}_{j_0}\in[0, b_{j_0}]\}=\frac{2}{2^{j_0}}\leqslant\frac{4}{r}(\beta-\alpha),\end{aligned}$$

这说明 F 满足 Lipschtz 条件，故绝对连续．

引理 2　设 $\{a_j\}$ 具备本节开头所述性质，$\lim\limits_{j\to\infty}2^jb_j=r>0$．　$\{\lambda_j\}$ 为一列正数，使

$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\lambda_j} < \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j\lambda_j = \infty$, 则必存在 $\{\lambda_j'\}$: $0 < \lambda_j' \leqslant \lambda_j$, $j = 1, 2, \cdots$, 使 $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\lambda_j'} < \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j\lambda_j' < \infty$.

证　我们先证明对一切充分大的 j, 有 $a_j \leqslant \frac{2}{3} a_{j-1}$. 用反证法, 设所述结论不真, 则必存在无穷子列 $\{a_{j_k}\}$, 使 $a_{j_k} > \frac{2}{3} a_{j_k-1}$, 其中 $j_1 < j_2 < \cdots$, $k = 1, 2, \cdots$, 但因 $b_{j_k-1} = a_{j_k} + b_{j_k} \leqslant a_{j_k-1}$, 故有 $b_{j_k} \leqslant a_{j_k-1} - a_{j_k} \leqslant \frac{1}{3} a_{j_k-1}$, 从而 $b_{j_k} + \frac{1}{3} b_{j_k-1} \leqslant \frac{1}{3}(a_{j_k-1} + b_{j_k-1}) = \frac{1}{3} b_{j_k-2}$, 于是

$$2^{j_k-2}\left(b_{j_k} + \frac{1}{3} b_{j_k-1}\right) \leqslant \frac{1}{3} \cdot 2^{j_k-2} b_{j_k-2}.$$

令 $k \to \infty$, 就有 $\frac{5}{12} r \leqslant \frac{1}{3} r$, 此为矛盾, 故断言成立.

现证引理本身. 为方便计, 设对一切 j, 有 $a_j \leqslant \frac{2}{3} a_{j-1}$. 取 $0 < \lambda_j' = \min\{\lambda_j, \ln j\} \leqslant \lambda_j$, $j = 1, 2, \cdots$. 就显然有

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\lambda_j'} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\lambda_j} + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\ln j} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\lambda_j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j\lambda_j' \leqslant a_1 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \ln j < \infty.$$

三、主要结果

定理 1　设无穷可分分布 $F(x)$ 的特征函数由(1.2)式给出, 且

1°. $\{a_j\}$ 有一子列 $\{\tilde{a}_j\}$ 满足条件:

$$\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2 > \cdots > 0, \quad 或 \quad \tilde{a}_1 < \tilde{a}_2 < \cdots < 0,$$

若记 $\tilde{b}_j = \sum_{k=j+1}^{\infty} |\tilde{a}_k|$, 则对一切 j, 有 $|\tilde{a}_j| \geqslant b_j$, 且 $\lim_{j\to\infty} 2^j b_j > 0$;

2°. 若与 $\{\tilde{\lambda}_j\}$ 相应的 $\{\tilde{a}_j\}$ 使得 $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\tilde{\lambda}_j} < \infty$,

则 $F(x)$ 绝对连续.

证　为方便计, 设 $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2 > \cdots > 0$. 令

$$\phi_1(t) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \hat{\lambda}_j (e^{it\tilde{a}_j} - 1)\right\},$$

$$\phi_2(t) = \exp\left\{\sum_{j:\, a_j \notin \{\tilde{a}_j\}} \lambda_j \left(e^{ita_j} - 1 - \frac{ita_j}{1 + a_j^2}\right) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{it\tilde{a}_j\tilde{\lambda}_j}{1 + \tilde{a}_j^2}\right\},$$

此处设 $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j\tilde{\lambda}_j < \infty$. 若不然, 则根据引理 2, 选出相应的 $\{\tilde{\lambda}_j'\}$, 在 $\phi_1(t)$ 中用 $\tilde{\lambda}_j'$ 代替 $\tilde{\lambda}_j$, 并改设

$$\phi_2(t)=\exp\left\{\sum_{j:\,a_j\notin\{\tilde{a}_j\}}\lambda_j\left(e^{ita_j}-1-\frac{ita_j}{1+a_j^2}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{\infty}(\tilde{\lambda}_j-\tilde{\lambda}'_j)\left(e^{it\tilde{a}_j}-1-\frac{it\tilde{a}_j}{1+\tilde{a}_j^2}\right)-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{it\tilde{a}_j\tilde{\lambda}'_j}{1+\tilde{a}_j^2}\right\},$$

总之，我们有 $\phi(t)=\phi_1(t)\cdot\phi_2(t)$.

显然，欲证 $F(x)$ 绝对连续，只须证明与 $\phi_1(t)$ 相应的分布函数绝对连续. 记

$$\phi_1(t)=\prod_{j=1}^{\infty}\phi_{(j)}(t),\ \text{其中}\ \phi_{(j)}(t)=\exp\{\tilde{\lambda}_j(e^{it\tilde{a}_j}-1)\},\ j=1,2,\cdots.$$

设 $\{(X_{j1},X_{j2},\cdots,Y_j),j=1,2,\cdots\}$ 为独立随机变数，其中

$$P(X_{jl}=0)=P(X_{jl}=1)=\frac{1}{2},\ l=1,2,\cdots.$$

y_j 服从参数为 $2\tilde{\lambda}_j$ 的 Poisson 分布，$j=1,2,\cdots$. 令 $Z_j=\sum_{l=1}^{y_j}\tilde{a}_jX_{jl}$，则 Z_j 的特征函数为 $\phi_{(j)}(t)$，那么，随机变数 $\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{y_j}\tilde{a}_jX_{jl}$ 的特征函数为 $\prod_{j=1}^{n}\phi_{(j)}(t)$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\phi_{(j)}(t)=\prod_{j=1}^{\infty}\phi_{(j)}(t)=\phi_1(t),$$

故 $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{y_j}\tilde{a}_jX_{jl}$ 依分布收敛，从而 a·s 收敛，所以 $Z\triangleq\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{y_j}\tilde{a}_jX_{jl}$ 对几乎一切 ω 有意义，且 Z 的特征函数即为 $\phi_1(t)$.

记 $y_0=0$，令 $\Omega_j=[y_{j-1}=0]\cap\left(\bigcap_{l=j}^{\infty}[y_l\neq 0]\right)$，$j=1,2,\cdots$. 易见事件 $\{\Omega_j\}$ 两两不交，且因 $\sum_{j=1}^{\infty}P[y_j=0]=\sum_{j=1}^{\infty}e^{-2\tilde{\lambda}_j}<\infty$，故由 Borel-Cantelli 引理知 $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega_j\right)=1$. 为方便计，不妨对一切 j，$P(\Omega_j)>0$. 令

$$U_j=\sum_{k=j}^{\infty}\tilde{a}_kX_{k1},\quad V_j=Z-U_j,\quad j=1,2,\cdots.$$

注意到 $\{(X_{j1},X_{j2},\cdots,y_j),j=1,2,\cdots\}$ 是独立随机变数序列，知事件 $[U_j\leqslant u]$ 与 Ω_j 独立. 再注意到 Ω_j 的定义，知事件 $[U_j\leqslant u]$ 与 $\Omega_j[V_j\leqslant v]$ 也独立，因而

$$P([U_j\leqslant u][V_j\leqslant v]|\Omega_j)=\frac{P([U_j\leqslant u][V_j\leqslant v]\Omega_j)}{P(\Omega_j)}=\frac{P[U_j\leqslant u]\cdot P([V_j\leqslant v]\Omega_j)}{P(\Omega_j)}$$
$$=P[U_j\leqslant u]\cdot P([V_j\leqslant v]|\Omega_j)=P([U_j\leqslant u]|\Omega_j)\cdot P([V_j\leqslant v]|\Omega_j),$$

这表明 U_j 与 V_j 相对于条件概率 $P(\cdot\,|\Omega_j)$ 独立. 由于 $P([U_j\leqslant u]|\Omega_j)=P(U_j\leqslant u)$，由引理 1 知，$P[U_j\leqslant u]$ 绝对连续，$j=1,2,\cdots$. 于是由

$$P([Z\leqslant z]|\Omega_j)=P([U_j+V_j\leqslant z]|\Omega_j)=\int_{-\infty}^{\infty}P([U_j\leqslant z-v]|\Omega_j)\,dP([V_j\leqslant v]|\Omega_j)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}P[U_j\leqslant z-v]\,dP([V_j\leqslant v]|\Omega_j),$$

知 $P([Z\leqslant z]|\Omega_j)$ 绝对连续. 又因为 $P(Z\leqslant z)=\sum_{j=1}^{\infty}P([Z\leqslant z]|\Omega_j)\cdot P(\Omega_j)$，所以 Z 的

分布函数绝对连续.

定理 2 对任何 $0<r<2$，均存在这样的奇异连续的无穷可分分布 $F(x)$，其 Levy-Хинчин 谱函数 $G(x)$ 满足条件 $\int_{-1}^{1}|x|^{-r}dG(x)=\infty$.

证 设 $a_{\pm j}=\pm\frac{1}{2^{j^j}}$, $q_{\pm j}=\left(\frac{1}{2^{j^j}}\right)^r$, $j=1,2,\cdots$. 则相应的 $\lambda_j=2^{(2-r)j^j}+2^{-rj^j}$，于是有

$$\int_{-1}^{1}|x|^{-r}dG(x)=2\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2^{j^j}}{2^{j^j}}\right)^r=\infty,$$

所以 $G(x)$ 满足条件. 然而，由于

$$\phi(t)=\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\cos\frac{t}{2^{j^j}}-1\right)(2^{(2-r)j^j}+2^{-rj^j})\right\},$$

若取 $t_m=2^{m^m}\pi$，则

$$\sum_{j=1}^{\infty}(2^{(2-r)j^j}+2^{-rj^j})\left(1-\cos\frac{t_m}{2^{j^j}}\right)\leqslant 4\sum_{j=1}^{\infty}\left[2^{(2-r)j^j}\sin^2\left(\frac{2^{m^m}\pi}{2^{j^j}}\right)\right]$$

$$\leqslant 4\sum_{j=m+1}^{\infty}(2^{(2-r)j^j}\cdot 2^{2m^m-2j^j}\pi^2)\leqslant M\,2^{2m^m-r(m+1)^{m+1}}\to 0\quad(m\to+\infty),$$

其中 $M>0$ 为常数. 这表明 $\overline{\lim_{t\to\infty}}|\phi(t)|=1$，故 $F(x)$ 不绝对连续. 再由文献[2, 3]中有关定理知 $F(x)$ 不离散，从而必奇异连续.

下面二例表明定理 1 的用处:

例 1. 设 $c_1\geqslant c_2\geqslant\cdots\geqslant c>0$, $a_j=\frac{c_j}{2^j}$, $\lambda_j=\ln j$, $j=1,2,\cdots$，则 $F(x)$ 绝对连续.

事实上，$a_1>a_2>\cdots>0$，对一切 j, $b_j=\sum_{k=j+1}^{\infty}a_k\leqslant c_j\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{c_j}{2^j}=a_j$, $2^jb_j\geqslant c\cdot 2^j\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=c>0$. 又 $\sum_{j=1}^{\infty}e^{-2\ln j}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}<\infty$. 故由定理 1 知 $F(x)$ 绝对连续.

例 2. 设 $a_j=\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}$, $\lambda_j=\ln j$, $j=1,2,\cdots$则 $F(x)$ 绝对连续. 事实上，令 $c_j=\frac{2^j}{\sqrt{(2^j-1)2^j}}$，则 $c_1>c_2>\cdots>1$，令 $\tilde{a}_j=\frac{1}{\sqrt{(2^j-1)2^j}}=\frac{c_j}{2^j}$，则 $\{\tilde{a}_j\}\subset\{a_j\}$，且

$$\sum_{j=1}^{\infty}e^{-2\tilde{\lambda}_j}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}e^{-2\lambda_j}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}<\infty,$$

故由定理 1 及例 1 知 $F(x)$ 绝对连续.

下例表明定理 1 的条件不是必要的.

例 3. 设 $a_j=\left(\frac{1}{3}\right)^j$, $\lambda_j=3^j$, $j=1,2,\cdots$. 容易看出 $b_j=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{j+1}$，故 $\lim_{j\to\infty}2^jb_j=0$，不满足条件 1°，但易证明 $\phi(t)\in L_1(\boldsymbol{R}_1)$，故而 $F(x)$ 绝对连续.

本文得到殷涌泉教授的精心指导，谨致谢意.

参 考 文 献

[1] Tucker, H., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **6** (1965), 316—330.
[2] Hartman, P. & Wintner, A., *Amer. J. Math.*, **64** (1942), 273—298.
[3] Blum, J. & Rosenblatt, M., *Pasific J. Math.*, **9** (1959), 1—7.