两维 Euler 方程在随时间变化区域中存在整体光滑解的充分必要条件*

穆　穆

（中国科学院大气物理研究所，北京）

关键词　流体力学、数值天气预报、Euler 方程、整体光滑解

在文献[1]中，Kozono 研究了两维 Euler 方程在随时间变化区域中整体光滑解的存在唯一性问题．本文继续研究这一问题．首先，Kozono 研究的 Euler 方程是惯性坐标系中的形式．在另外一些力学问题中(例如数值天气预报)，需要研究旋转坐标系中流体的运动．这时，必须考虑柯氏力的作用[2]，Kozono 的工作未能回答具柯氏力的两维 Euler 方程在随时间 t 变化区域中初边值问题是否存在整体光滑解．本文将证明该类问题可化成作者在文献[3]中研究过的广义涡度方程的初边值问题，从而利用文献[3]的结果，给出了该类问题存在整体光滑解的一个充分必要条件．其次，Kozono 在文献[1]中给出了 Euler 方程在随时间变化区域中存在整体光滑解的一个充分条件，但该条件不易直接验证，本文将给出一个易于验证的充分必要条件．

设 $\gamma(x_1, x_2, t)\in C^\infty(R^2\times\bar{R}_+)$，$\Omega(t)=\{(x_1, x_2, t)|\gamma(x_1, x_2, t)<0\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界单连通区域 $(t\geqslant 0)$．$\Gamma_t=\bigcup_{t>0}\partial\Omega(t)$，$Q=\bigcup_{t>0}\Omega(t)$．考察下述两维 Euler 方程初边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial p}{\partial x_1}=\omega u_2+f_1, & (\mathrm{E}_1)\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+u_1\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial p}{\partial x_2}=-\omega u_1+f_2, & (\mathrm{E}_2)\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}=0, & (\mathrm{E}_3)\quad \text{在 } Q \text{ 中}, \\ \left(\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}+u_1\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_2}\right)\Big|_{\Gamma_t}=0, & (\mathrm{E}_4)\\ (u_1, u_2)|_{t=0}=(u_1^0, u_2^0), & (\mathrm{E}_5)\end{cases}\qquad (\mathrm{E})$$

这里 (u_1, u_2) 是速度，p 是压力，ω 是旋转坐标系的科氏参数(已知)，(f_1, f_2) 是外力．在 $\Omega(0)$ 中 $\dfrac{\partial u_1^0}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_2^0}{\partial x_2}=0$，且 $\left(\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}+u_1^0\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_1}+u_2^0\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_2}\right)\Big|_{\partial\Omega(0)}=0$．应该指出，数值天气预报中的正压无辐散模式(参见文献[2])，即可用 (E_1)，(E_2)，(E_3) 加以描述．

定理 1　下述三个命题等价

(i) 问题 (E) 存在整体光滑解．

(ii) 对 $\forall t\geqslant 0$，$\int_{\partial\Omega(t)}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\Big/|\nabla_x\gamma|\,dl_t=0$，

本文1987年9月8日收到．

* 中国科学院青年奖励研究基金资助．

这里 dl_t 是 $\partial\Omega(t)$ 上的线元.

(iii) 存在以 t 为参数的一族映射 $X_t=(x_1(y_1, y_2, t), x_2(y_1, y_2, t))$, 使得 ($\alpha$), 对 $\forall t\geqslant 0$, X_t 是从 $\bar{\Omega}(0)$ 到 $\bar{\Omega}(t)$ 的微分同胚. (β), 对 $\forall t\geqslant 0$, X_t 是保测度的. (γ), X_t 关于参数 t 光滑.

证 首先证明 (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).

(a) (iii) $\Rightarrow$ (ii), 此即文献 [1] 之引理 1.2.

(b) (ii) $\Rightarrow$ (iii), 因命题 (ii) 成立, 这时存在函数 $F\in C^\infty(Q)$ 满足 Neumann 问题:

$$\begin{cases}\Delta F=0, \quad \text{在 } \Omega(t) \text{ 中}, \ t\geqslant 0, & (1)\\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\gamma_{x_1}+\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\gamma_{x_2}+\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\right)\Big|_{\partial\Omega(t)}=0, & (2)\end{cases}$$

这里 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. 令 $(W_1, W_2)=(F_{x_1}, F_{x_2})$, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial W_2}{\partial x_2}=0, \quad \text{在 } Q \text{ 中}, & (3)\\ (W_1\gamma_{x_1}+W_2\gamma_{x_2}+\gamma_t)|_{\rho_t}=0. & (4)\end{cases}$$

再解常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=W_1(x, t), \quad \dfrac{dx_2}{dt}=W_2(x, t),\\ (x_1, x_2)|_{t=0}=(y_1, y_2)\in\bar{\Omega}(0).\end{cases} \qquad (*)$$

因为 (W_1, W_2) 满足边界条件 (4), 对 $\forall(y_1, y_2)\in\bar{\Omega}(0)$, 问题 (*) 的解 $X_t=x(t;y_1, y_2)$ 在 $t\in[0, +\infty)$ 上存在. 由常微分方程的经典理论知 X_t 即满足命题 (iii) 中的条件 (α), (γ). 再注意到 (3) 式, 知条件 (β) 亦被满足.

再证明 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

(a) (i) $\Rightarrow$ (ii). 事实上, 从 (E_3) 出发, 在 $\Omega(t)$ 上积分, 再利用边界条件 (E_4) 与分部积分公式, 即知命题 (ii) 成立.

(b) (ii) $\Rightarrow$ (i). 因为区域是单连通的, 利用 (E_3) 可引进流函数 $\psi(x_1, x_2, t)$, 使 $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}=-u_1$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}=u_2$. 对 ($E_1$), ($E_2$) 施行涡度运算, 可将 (E) 化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta\psi-\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta\psi+\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\Delta\psi\\ \quad+\dfrac{\partial\omega}{\partial x_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\omega}{\partial x_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \text{在 } Q \text{ 中}, & (5)\\ \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_2}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\right)\Big|_{\Gamma_t}=0, & (6)\\ (\Delta\psi)|_{t=0}=\dfrac{\partial u_2^0}{\partial x_1}-\dfrac{\partial u_1^0}{\partial x_2}. & (7)\end{cases}$$

利用由 (3), (4) 式给出的 (W_1, W_2), 可知存在函数 $\chi\in C^\infty(Q)$, 使

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\chi}{\partial x_2}=-W_1, \quad \dfrac{\partial\chi}{\partial x_1}=W_2. \quad \text{在 } Q \text{ 中}, & (8)\\ \left(\dfrac{\partial\chi}{\partial x_1}\gamma_{x_2}-\dfrac{\partial\chi}{\partial x_2}\gamma_{x_1}+\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\right)\Big|_{\Gamma_t}=0. & (9)\end{cases}$$

令 $\psi_1 = \psi - \chi$，则易见对 $\forall t \geqslant 0$，ψ_1 沿 $\partial Q(t)$ 的切向导数处处为零，故 $\psi_1|_{\Gamma_t} = g(t)$。再令 $\psi_2 = \psi_1 - g(t)$，则问题 (5)—(7) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_2 - \dfrac{\partial}{\partial x_2}(\psi_2+\chi)\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta\psi_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_1}(\psi_2+\chi)\dfrac{\partial}{\partial x_2}\Delta\psi_2 \\ \quad = R_1(\psi_2) + G(f_1, f_2, \chi, \omega), \qquad \text{在 } Q \text{ 中}, \\ \psi_2|_{\Gamma_t} = 0, \\ \psi_2|_{t=0} = \psi_0, \end{cases}$$

这里 $R_1(\psi_2) = \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_1} - \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta\chi\right) + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\Delta\chi - \dfrac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)$；$G(f_1, f_2, \chi, \omega) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta\chi + \dfrac{\partial\chi}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\Delta\chi - \dfrac{\partial\omega}{\partial x_2}\right) + \dfrac{\partial\chi}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_1} - \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta\chi\right)$. 函数 ψ_0 满足定解问题

$$\left\{\Delta\psi_0 = \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} - (\Delta\chi)|_{t=0},\ \text{在 } Q(0) \text{ 中};\ \psi_0|_{\partial Q(0)} = 0\right\}.$$

取由(*)式给出的映射族 $X_t(y_1, y_2)$. 对于每一固定的 $t \geqslant 0$，其逆映射记为 $X_t^{-1} = (y_1(x_1, x_2, t),\ y_2(x_1, x_2, t))$. 易见映射 $(x_1, x_2, t) \longmapsto (y_1(x_1, x_2, t),\ y_2(x_1, x_2, t), t)$ 将 Q 微分同胚地映成柱状区域 $\tilde{Q}(0) \times [0, +\infty)$，记其为 $\tilde{Q}$，ψ、$R_1(\psi)$，$G(f_1, f_2, \chi, \omega)$ 分别映为 $\tilde{\psi}$，$\tilde{R}_1(\tilde{\psi})$，$\tilde{G}(f_1, f_2, \tilde{\chi}, \tilde{\omega})$. 算子 Δ 成为 $\tilde{Q}(0)$ 上系数光滑依赖于参数 t 的二阶线性椭圆微分算子族 $A(t)$. 问题 (E) 最终化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}A\tilde{\psi} + \left[\left(-\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)\dfrac{\partial}{\partial y_2}(\tilde{\psi}+\chi) + \dfrac{\partial y_1}{\partial t}\right]\cdot\dfrac{\partial}{\partial y_1}A\tilde{\psi} \\ \quad + \left[\left(-\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)\dfrac{\partial}{\partial y_1}(\tilde{\psi}+\chi) + \dfrac{\partial y_2}{\partial t}\right]\cdot\dfrac{\partial}{\partial y_2}A\tilde{\psi} \\ \quad + \tilde{R}_1(\tilde{\psi}) + \tilde{G}(f_1, f_2, \tilde{\chi}, \tilde{\omega}) = 0, \qquad \text{在 } \tilde{Q} \text{ 中}, \\ \tilde{\psi}|_{\Gamma_t} = 0, \\ \tilde{\psi}|_{t=0} = \tilde{\psi}_0. \end{cases} \tag{$\tilde{\text{E}}$}$$

现验证问题 ($\tilde{\text{E}}$) 恰为文献 [3] 所考察的广义涡度方程初边值问题. 由 Laplace 算子 Δ 的性质可知微分算子族 $A(t)$ 满足文献[3] p.203 中的假定 (H1). 再验证问题 ($\tilde{\text{E}}$) 满足那里的假定 (H2). 记 $\tilde{\tau}(y_1, y_2, t) = \tau(x_1(y_1, y_2, t), x_2(y_1, y_2, t), t)$ 则 $(\tilde{\tau}_{y_1}, \tilde{\tau}_{y_2})$ 为 $\tilde{Q}(0) \times \{t\}$ 的边界 $\partial\tilde{Q}(t)$ 上的外法方向数. 我们只须验证下述两式成立:

$$\left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)\tilde{\tau}_{y_1}\tilde{\tau}_{y_1} + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)\tilde{\tau}_{y_1}\tilde{\tau}_{y_2}\right]\Big|_{\Gamma_t} = 0, \tag{10}$$

$$\left\{\left[\left(-\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y_2} + \frac{\partial y_1}{\partial t}\right]\tilde{\tau}_{y_1} + \left[\left(-\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)\times\frac{\partial\chi}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial t}\right]\tilde{\tau}_{y_2}\right\}\Big|_{\Gamma_t} = 0. \tag{11}$$

易见 (10) 式成立. 利用 (9) 式并注意到在 $\tilde{\Gamma}_t$ 上，$\dfrac{\partial\tilde{\tau}}{\partial t} = 0$ 即知 (11) 式成立.

综上知问题 ($\tilde{\text{E}}$) 满足文献 [3] 之假定 (H1), (H2). 利用文献 [3] 中定理 6.1，可知问题 ($\tilde{\text{E}}$) 存在整体光滑解，由此不难验证问题 (E) 亦具整体光滑解. 证毕.

下面我们将文献 [1] 的主要结果加以改进. 设区域 $Q^* = \bigcup_{t>0} Q^*(t)$. 而 $\{Q^*(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbf{R}^2$

中一族有界区域，Q^* 的边界 $\bigcup_{t\geqslant 0}\partial Q^*(t)$ 是 C^∞ 光滑的．并且假定：$\partial Q^*(t)=\bigcup_{0<i<m}\partial_i^*Q(t)$．而 $\{\partial_i^*Q(t)\}_{i=0}^m$ 是 $m+1$ 个简单闭曲线．$\{\partial_i^*Q(t)\}_{i=1}^m$ 位于 $\partial_0^*Q(t)$ 内部，但当 $i\neq 0$，$j\neq 0$ 且 $i\neq j$ 时，$\partial_i^*Q(t)$ 位于 $\partial_j^*Q(t)$ 外面．再设 Q^* 的边界 $\Gamma^*(t)$ 可由 C^∞ 函数 $\gamma^*(x_1, x_2, t)=0$ 表示．在 (E_1)，(E_2) 中令 $\omega=0$，记得到的方程为 $(E_1)^*$，$(E_2)^*$．将 (E_4) 中的 γ，Γ_t 置换为 γ^*，Γ_t^*，记所得到的方程为 $(E_4)^*$．文献[1]在 Q^* 中考察初边值问题 $(E_1)^*$，$(E_2)^*$，(E_3)，$(E_4)^*$，(E_5)（记该问题为 $(E)^*$）．Kozono 证明了：在上述假定下，若定理 1 中命题 (iii) 对区域 Q^* 成立，这时问题 $(E)^*$ 存在整体光滑解．本文将此结果改进为

定理 2　下述三个命题等价

(i)* 问题 $(E)^*$ 存在整体光滑解．

(ii)* 对 $\forall t\geqslant 0$，$\int_{\partial^*Q(t)}\frac{\partial\gamma^*}{\partial t}\Big/|\nabla_x\gamma^*|dl^*(t)=0$．

(iii)* 定理 1 中命题 (iii) 对于 Q^* 成立．

证　在证明定理 1 中命题 (ii) $\Longleftrightarrow$ 命题 (iii) 时，并未用到 Q 为单连通的假定，因而易见命题 (ii)* $\Longleftrightarrow$ 命题 (iii)*．同理，可知 (i)* $\Rightarrow$ (ii)*．再用文献[1]之定理，可由 (iii)* $\Rightarrow$ (i)*．证毕．

易见命题 (ii)* 较命题 (iii)* 便于直接验证．

参　考　文　献

[1] Kozono, H., *J. Diff. Eq.*, **57** (1985), 275—302.

[2] 曾庆存，数值天气预报的数学物理基础，第一卷，科学出版社，北京，1979.

[3] 穆穆，数学物理学报，**6** (1986), 201—218.