科 学 通 报
第39卷 第3期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1994年2月

具有时滞的 Duffing 型方程 $\ddot{x}+g(x(t-\tau))=p(t)$ 的 2π 周期解*

黄先开 向子贵
(北京商学院基础部,北京100037) (湖南吉首大学数学系,吉首416000)

关键词 Duffing 型方程、周期解、时滞

关于微分方程

$$\ddot{x}+g(x)=p(t)=p(t+2\pi), \tag{1}$$

讨论其周期解的文献已经很多,在 $g(x)$ 满足强非线性,亚线性以及避开共振点条件下均已讨论过其周期解的存在性问题(参见丁同仁[1]及葛渭高教授等近几年发表的论文),相对来说,对于时滞 Duffing 型方程这方面的研究还比较少[2-4]. 1984年,文献[2]在类似避开共振点条件下,证明了如下具有时滞的 Duffing 方程

$$\ddot{x}+g(x(t-\tau))=p(t)=p(t+2\pi) \tag{2}$$

至少存在一个 2π 周期解,文献[5]进一步把上述结果推广到高维系统

$$\ddot{x}+M(t,x(t-\tau))x(t-\tau)=p(t,x(t),x(t-\tau)). \tag{3}$$

本文用重合度理论继续讨论(2)式的 2π 周期解的存在性,仅在某种单侧限制条件下证明了两个定理. 本文恒假设 g,p 连续,$\tau\geqslant 0$ 为常数,$p(t)$ 以 2π 为周期,且 $\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{d}t=0$.

定理1 假设存在常数 $M,R>0$,满足

i) $g(x)\geqslant -M$,当 $x\leqslant -R$ 时,

ii) $xg(x)>0$ 当 $|x|\geqslant R$ 时,

则方程(2)至少存在一个 2π 周期解.

定理2 假设存在常数 $M,R>0$,满足

i) $g(x)\leqslant M$ 当 $x\geqslant R$ 时,

ii) $xg(x)>0$ 当 $|x|\geqslant R$ 时.

则方程(2)至少存在一个 2π 周期解.

例. 方程

$$\ddot{x}+x(t-\pi)e^{-x(t-\pi)}=-\sin t(1+e^{\sin t}),$$

至少存在一个 2π 周期解.

证 上述方程可改写为

$$\ddot{x}+x(t-\pi)e^{-x(t-\pi)}+\bar{p}=-\sin t(1+e^{\sin t})+\bar{p},$$

其中 $\bar{p}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin te^{\sin t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos te^{\sin t}\mathrm{d}t>0$, $\int_0^{2\pi}[-\sin t(1+e^{\sin t})+\bar{p}]\mathrm{d}t=0$,从而显然有定理

1993-06-16收稿,1993-10-19收修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目.

2的条件均满足,因此方程至少存在一个2π周期解. 事实上,$x(t)=\sin t$就是此方程的一个明显的2π周期解.

注1 上例中的结论不能由文献[2—4]中有关定理导出.

注2 当$\tau=0$时,定理1,2仍成立,即对方程(1)仍有类似结论.

注3 当$\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{d}t\neq 0$时,方程(2)可先化为方程

$$\ddot{x}+g(x(t-\tau))-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{d}t=p(t)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{d}t,$$

然后再应用定理1,2.

定理的证明 仅证定理1,定理2可类似讨论. 对$\forall\ \lambda\in(0,1]$,引进方程

$$\ddot{x}+\lambda g(x(t-\tau))=\lambda p(t), \tag{4}$$

设$x(t)$是方程(4)的任一2π周期解. 将方程(4)两边同时从0到2π积分得

$$\int_0^{2\pi}g(x(t-\tau))\mathrm{d}t=0, \tag{5}$$

设$[x(t-\tau)>R]=\{t\in[0,2\pi]\,|\,x(t-\tau)>R\}$,$[x(t-\tau)\leqslant R]=\{t\in[0,2\pi]\,|\,x(t-\tau)\leqslant R\}$,由条件i),ii)知,一定存在$R_1>0$,当$x\leqslant R$时,$|g(x)|\leqslant R_1$,因此

$$\int_{[x(t-\tau)>R]}g(x(t-\tau))\mathrm{d}t=-\int_{[x(t-\tau)\leqslant R]}g(x(t-\tau))\mathrm{d}t\leqslant\int_{[x(t-\tau)\leqslant R]}|g(x(t-\tau))|\mathrm{d}t\leqslant 2\pi R_1,$$

这样,利用条件ii)有

$$\int_0^{2\pi}|g(x(t-\tau))|\mathrm{d}t=\int_{[x(t-\tau)>R]}g(x(t-\tau))\mathrm{d}t+\int_{[x(t-\tau)\leqslant R]}|g(x(t-\tau))|\mathrm{d}t\leqslant 4\pi R_1,$$

即

$$\int_0^{2\pi}|g(x(t-\tau))|\mathrm{d}t\leqslant 4\pi R_1. \tag{6}$$

根据条件ii)及(5)式知一定存在$t_1\in[0,2\pi]$,使得$|x(t_1-\tau)|\leqslant R$,记$t_1-\tau=2\pi n+t_0$,n为某整数,$t_0\in[0,2\pi]$,则$|x(t_0)|\leqslant R$,因此,对$\forall\ t\in[0,2\pi]$,有

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

从而

$$|x(t)|\leqslant R+\int_0^{2\pi}|\dot{x}(t)|\mathrm{d}t. \tag{7}$$

将方程(4)两边同乘以$x(t)$并从0到2π积分

$$-\int_0^{2\pi}|\dot{x}(t)|^2\mathrm{d}t+\lambda\int_0^{2\pi}x(t)g(x(t-\tau))\mathrm{d}t=\lambda\int_0^{2\pi}x(t)p(t)\mathrm{d}t,$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|\dot{x}(t)|^2\mathrm{d}t&\leqslant\max_{t\in[0,2\pi]}|x(t)|\left(\int_0^{2\pi}|g(x(t-\tau))|\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}|p(t)|\mathrm{d}t\right)\\&\leqslant\left(R+\int_0^{2\pi}|\dot{x}(t)|\mathrm{d}t\right)(4\pi R_1+2m\pi),\end{aligned}$$

其中$m=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}|p(t)|$. 从上式可导出存在与$\lambda$无关的$R_2>0$,使得

$$\int_0^{2\pi}|\dot{x}(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant R_2, \tag{8}$$

由(7),(8)式进一步可证存在与λ无关的$R_3>0$满足

$$|x(t)| \leqslant R_3. \tag{9}$$

又由(4)式有

$$\int_0^{2\pi} |\ddot{x}(t)|\mathrm{d}t \leqslant \lambda \int_0^{2\pi} |g(x(t-\tau))|\mathrm{d}t + \lambda \int_0^{2\pi} |p(t)|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 4\pi R_1 + 2m\pi, \tag{10}$$

结合(8),(10)式知存在 $R_4>0$,使得

$$|\dot{x}(t)| \leqslant R_4, \quad (R_4 \text{ 与 } \lambda \text{ 无关}). \tag{11}$$

取 $R_0=\max\{R,R_3,R_4\}$,令 $x=\{x(t)\in C^1(R,R)\,|\,x(t+2\pi)=x(t)\}$,$\Omega=\{x(t)\in X\,||x(t)|<R_0,|\dot{x}(t)|<R_0\}$,$Lx=\ddot{x}$,$Nx=-g(x(t-\tau))+p(t)$,这里有 $\mathrm{Ker}L=R$(实数集),同时定义投影算子为

$$P:X\to \mathrm{Ker}L, x\to px=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\mathrm{d}t,$$

$$Q:X\to X/\mathrm{Im}L, x\to Qx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\mathrm{d}t,$$

则有 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L$,$\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L$. 因此,$L$ 是指标为零的 Fredholm 算子,且有 N 在 $\bar{\Omega}\subset X$ 上 L 紧(见文献[6],p. 178).

方程(4)即为算子方程

$$Lx=\lambda Nx, \tag{12}$$

当 $\lambda=1$时即方程(2). 根据前面对(12)式周期解界的估计及已知条件,有

(i)对$\forall$ $(x,\lambda)\in(\partial\Omega)\cap\mathrm{dom}L)\times[0,1]$,$Lx\neq\lambda Nx$.

下面证明还有

(ii)对$\forall$ $x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$,$QNx\neq 0$,

(iii)$\deg\{QN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0$.

因为当 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$ 时,x 为常数且 $|x|=R_0$,所以 $QNx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-g(x(t-\tau))+p(t))\mathrm{d}t=-g(x)\neq 0$,(ii)满足. 又作变换:

$$F(x,\mu)=\mu x+(1-\mu)g(x), 0\leqslant\mu\leqslant 1,$$

则对$\forall$ $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$ 及 $\mu\in[0,1]$,有 $xF(x,\mu)=\mu x^2+(1-\mu)xg(x)>0$,说明 $F(x,\mu)\neq 0$,即 $F(x,\mu)$是同伦变换,因此

$$\deg\{QN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}=\deg\{-g(x),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}$$
$$=\deg\{-x,\Omega\cap R^n,0\}\neq 0.$$

根据重合度理论[6],知方程(2)至少存在一个2π 周期解. 定理1得证.

参　考　文　献

[1] 丁同仁,中国科学,A 辑,1982,(1):1—13.

[2] Iannacci, R., Nkashama, M. N., *Lecture Notes in Math.* 1151,Springer-Verlag, 1984,224—232.

[3] Ward, J., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1981,**81**:415—420.

[4] Mawhin, J., *J. Math. Anal. Appl.*, 1974,**45**:588—603.

[5] 黄先开,系统科学与数学,1989,**9**(4):298—308.

[6] Gaines, R., Mawhin, J., *Lecture Notes in Math.* 568,Springer-Verlag, 1977.