科 学 通 报
第 42 卷 第 2 期 Chinese Science Bulletin 1997 年 1 月

【研究简报】

电磁场中的广义最小作用量原理及其应用

谢拥军 梁昌洪
(西安电子科技大学 601 室, 西安 710071)

关键词 广义最小作用量原理 Maxwell 方程 变分公式

物理现象的一般规律可以用最小作用量原理来描述, 也就是说, 真实规律对应着作用量的稳定点, 例如光学中的 Fermat 定理和静电学中的 Thomson 定理. 在电动力学中, 当作用量处于稳定点时, 系统满足 Lagrange 方程, 这个作用量一般定义为 Lagrange 函数对时间的积分, 即此时的最小作用量原理可以表述为:"事物真实运动的轨迹使作用量处于稳定点".

电动力学中的作用量的形式最早由 Landau 给出[1], 但是它只适用于无耗媒质中. 本文引入了电磁场伴随对称的观点, 给出了适用于包括有耗非互易媒质在内的一般媒质中的广义最小作用量原理, 证明了当广义作用量处于稳定点时与 Maxwell 方程是相符的, 并在无耗媒质中退化为现有的"最小作用量原理". 最后利用广义最小作用量原理推出了一些有用的电磁场变分公式作为其应用例子.

1 电磁场中的广义作用量

如图 1 所示, 一般媒质中的广义作用量定义为

$$J = \int_{-t_1}^{t_1} L \mathrm{d}t, \tag{1}$$

其中的 Lagrange 量 L 为

$$\begin{aligned} L = \int_v \Big(\frac{1}{2} \{ & \boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r}, -t) \cdot \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{H}^a(\boldsymbol{r}, -t) \cdot \hat{\mu}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) - \\ & \boldsymbol{A}^a(\boldsymbol{r}, -t) \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{J}^a(\boldsymbol{r}, -t) - \rho^a(\boldsymbol{r}, -t) \varphi(\boldsymbol{r}, t) - \\ & \rho(\boldsymbol{r}, t) \varphi^a(\boldsymbol{r}, -t) \} \Big) \mathrm{d}v, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\hat{\mu}} \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t), \tag{3}$$

2 余瑞璜. 固体与分子经验电子理论. 科学通报, 1978, 23(4): 217
3 余瑞璜. 固体与分子经验电子理论——等效价电子假定. 科学通报, 1981, 26(4): 206
4 刘志林. 合金价电子结构与成分设计. 长春: 吉林科学技术出版社, 1993. 233
5 张瑞林. 固体与分子经验电子理论. 长春: 吉林科学技术出版社, 1993. 440, 480
6 Pearson W B. A Handbook of Lattice Spacing and Structures of Metals and Alloys. New York: Pergamon, 1967. 439
7 胡汉起. 金属凝固原理. 北京: 机械工业出版社, 1991. 48
8 冯 端. 金属物理, 第一卷. 北京: 科学出版社, 1987. 534

(1996-04-19 收稿, 1996-07-27 收修改稿)

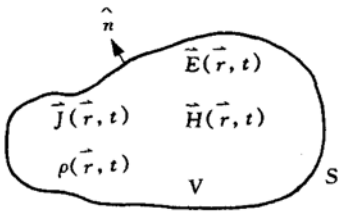

图1 封闭面S包围的区域V内为存在着电磁场、电流及电荷的一般媒质

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} - \nabla\varphi(\boldsymbol{r},t), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{H}^a(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\hat{\mu}^a}\nabla \times \boldsymbol{A}^a(\boldsymbol{r},t), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{A}^a(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} - \nabla\varphi^a(\boldsymbol{r},t), \tag{6}$$

式中$\boldsymbol{E}^a$, $\boldsymbol{H}^a$, $\boldsymbol{A}^a$, φ^a, $\boldsymbol{J}^a$, ρ^a 分别是图1中 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{A}$, φ, $\boldsymbol{J}$, ρ 的伴随, $\hat{\mu}$, $\hat{\varepsilon}$ 和 $\hat{\mu}^a$, $\hat{\varepsilon}^a$ 分别是 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}^a$, $\boldsymbol{H}^a$ 等所处媒质的本构参数, 两者在(2)式中的关系如下:

$$\hat{\mu}^a(\boldsymbol{r},-t) = \hat{\mu}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r},t); \hat{\varepsilon}^a(\boldsymbol{r},-t) = \hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r},t). \tag{7}$$

对于以上定义我们说明如下:

(ⅰ)在时域中, 互易媒质满足 $\hat{\mu}^{\mathrm{T}}(t)=\hat{\mu}(t)$, $\hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)=\hat{\varepsilon}(t)$; 无耗媒质满足: $\hat{\mu}^{\mathrm{T}}(-t)=\hat{\mu}(t)$, $\hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(-t)=\hat{\varepsilon}(t)$(等号两边的量作用于同一时间的场).

(ⅱ)在同一种媒质中,

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},-t)\leftrightarrow -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t), \quad \boldsymbol{J}'(\boldsymbol{r},-t)\leftrightarrow -\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t), \quad \varphi'(\boldsymbol{r},-t)\leftrightarrow\varphi(\boldsymbol{r},t),$$
$$\rho'(\boldsymbol{r},-t)\leftrightarrow\rho(\boldsymbol{r},t), \quad \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r},-t)\leftrightarrow\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t), \quad \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r},-t)\leftrightarrow -\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t).$$

(ⅲ)如果令 $\delta J=0$, 我们可以得到 Maxwell 方程, 例如, 由 $\delta J_{\varphi^a(\boldsymbol{r},-t)}=0$ 和 $\delta J_{\varphi(\boldsymbol{r},t)}=0$, 可以推出在均匀域内,

$$\nabla\cdot(\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)) = \rho(\boldsymbol{r},t)$$
$$\nabla\cdot(\hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r},-t)) = \nabla\cdot(\hat{\varepsilon}^a(\boldsymbol{r},-t)\cdot\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r},-t)) = \rho^a(\boldsymbol{r},-t), \tag{8}$$

和边界条件:

$$\hat{n}\cdot(\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r}^+,t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}^+,t) - \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r}^-,t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}^-,t)) = 0,$$
$$\hat{n}\cdot(\hat{\varepsilon}^a(\boldsymbol{r}^+,-t)\cdot\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r}^+,-t) - \hat{\varepsilon}^a(\boldsymbol{r}^-,-t)\cdot\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r}^-,-t)) = 0. \tag{9}$$

(ⅳ)在无耗媒质中, 由上述性质(ⅰ)和(ⅱ), 我们可以选择伴随场为原场自身, 这时的结论同文献[1], 即此时广义最小作用量原理退化为现有的最小作用量原理

$$L_{\text{无}} = \int_v \Big(\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) - \rho(\boldsymbol{r},t)\varphi(\boldsymbol{r},t)\Big)\mathrm{d}v. \tag{10}$$

在互易媒质中, 由上述性质(ⅰ)和(ⅱ), 我们可以选择伴随场为原场的负时间量

$$L_{\text{互}} = \int_v \Big(\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},,-t)\cdot\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},-t)\cdot\hat{\mu}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},-t)\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},-t) - \rho(\boldsymbol{r},-t)\varphi(\boldsymbol{r},t) - \rho(\boldsymbol{r},t)\varphi(\boldsymbol{r},-t)\Big)\mathrm{d}v. \tag{11}$$

2 电磁场广义作用量的频域表达式

对于正弦电磁场, 人们更习惯于在频域内研究. 我们将(1)式的积分限$[-t_1, t_1]$扩展为

$(-\infty, +\infty)$时,则可由 Fourier 变换化为频域:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}f \int_v \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) + \boldsymbol{H}^a(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \hat{\mu}(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega) - \boldsymbol{A}^a(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, \omega) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \boldsymbol{J}^a(\boldsymbol{r}, w) - \rho^a(\boldsymbol{r}, \omega) \varphi(\boldsymbol{r}, \omega) - \rho(\boldsymbol{r}, \omega) \varphi^a(\boldsymbol{r}, \omega)) \right) \mathrm{d}v. \tag{12}$$

同样我们可以由 $\delta J = 0$ 推出频域内的 Maxwell 方程. 例如,由 $\delta J_{\boldsymbol{A}^a(\boldsymbol{r}, \omega)} = 0$ 和 $\delta J_{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, \omega)} = 0$,可以推出在均匀域内,

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega) = \mathrm{j}\omega \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, \omega),$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}^a(\boldsymbol{r}, \omega) = \mathrm{j}\omega \hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r}, \omega) + \boldsymbol{J}^a(\boldsymbol{r}, \omega) = j\omega \hat{\varepsilon}^a(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r}, \omega) + \boldsymbol{J}^a(\boldsymbol{r}, \omega) \tag{13}$$

和边界条件:

$$\hat{n} \times \{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}^+, \omega) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}^-, \omega)\} = 0, \quad \hat{n} \times \{\boldsymbol{H}^a(\boldsymbol{r}^+, \omega) - \boldsymbol{H}^a(\boldsymbol{r}^-, \omega)\} = 0. \tag{14}$$

同样,相应于(10)和(11)式分别有

$$J_{\text{无}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}f \int_v \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{r},) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r}, \omega)) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{r}, \omega) - \rho(\boldsymbol{r}, \omega) \varphi^*(\boldsymbol{r}, \omega) \right) \mathrm{d}v, \tag{15}$$

$$J_{\text{互}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}f \int_v \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \hat{\mu}(\boldsymbol{r},) \times \hat{H}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega)) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, w) - \rho(\boldsymbol{r}, \omega) \varphi(\boldsymbol{r}, \omega) \right) \mathrm{d}v. \tag{16}$$

3　应用举例

Morishita 曾经基于"最小作用量原理"给出推导无耗媒质中电磁场变分公式的一般方法[2],下面利用"广义最小作用量原理"推导互易(可以有耗)和有耗非互易媒质中电磁场变分公式.

例如填充互易媒质任意形状理想导体壁谐振腔频率的变分公式为

$$\omega^2 = \frac{\int_v (\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})) \cdot \frac{1}{\hat{\mu}(\boldsymbol{r})} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})) \mathrm{d}v}{\int_v (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})) \mathrm{d}v}. \tag{17}$$

这与 Harrington 在文献[3]中的结果是一致的.

又例如填充有耗非互易媒质理想导体壁波导传播常数的变分公式为

$$\beta = \left(\int_\Omega (-\mathrm{j}\boldsymbol{H}^a(x, y) \cdot \nabla_t \times \boldsymbol{E}(x, y) - \mathrm{j}\boldsymbol{E}^a(x, y) \cdot \nabla_t \times \boldsymbol{H}(x, y) + \omega \boldsymbol{H}^a(x, y) \cdot \hat{\mu} \cdot \boldsymbol{H}(x, y) - \omega \boldsymbol{E}^a(x, y) \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E}(x, y)) \mathrm{d}\Omega \right) \Big/ \int_\Omega \hat{i}_Z \cdot (\boldsymbol{E}^a(x, y) \times \boldsymbol{H}(x, y) - \boldsymbol{E}(x, y) \times \boldsymbol{H}^a(x, y)) \mathrm{d}\Omega, \tag{18}$$

式中,下标 t 表示在横截面上的作用,$\hat{t}_Z$ 表示 Z 向的单位矢量.

这个结果与 Gardiol 在文献[4]中的结果一致.