科学通报 2011 年 第 56 卷 第 17 期：1401 ~ 1410
论 文 www.scichina.com csb.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

# 基于变截面单元体的㶲耗散率最小导热构形优化

肖庆华, 陈林根*, 孙丰瑞

海军工程大学船舶与动力学院, 武汉 430033
* 联系人, E-mail: lgchenna@yahoo.com; lingenchen@hotmail.com

2011-01-23 收稿, 2011-05-10 接受
国家自然科学基金(10905093)、教育部新世纪优秀人才资助计划(NCET-04-1006)和全国优秀博士学位论文作者专项资金(200136)资助项目

**摘要** 基于构形理论, 以㶲耗散率最小为优化目标, 对变截面外形和变高导热通道的单元体进行了构形优化, 结果表明, 当增加控制体内部复杂程度时, 并不总能降低其平均传热温差, 而是存在最佳的构造级数, 使平均传热温差达到最小. 因为变截面高导热通道内的热流密度不符合线性分布, 所以基于㶲耗散率最小的最优构形与基于最大温差最小的最优构形是不同的. 基于㶲耗散率最小的最优构形相比基于最大温差最小的最优构形可以较大程度地降低平均传热温差, 明显地改善了传热性能. 由于㶲更能反映对传热能力的要求, 因此基于此可对各种导热构形问题进行进一步的研究.

**关键词**
构形理论
㶲耗散率
"体-点"导热
广义热力学优化

在自然界中许多"体-点"流动问题, 例如河流地貌、珊瑚礁的形成过程等, 是符合树状结构的. 工程上, "体-点"导热问题是指如何在一定的空间("体")内布置一定的高导热材料, 使其内发热量高效地传到器件表面的某一指定位置("点"). Bejan[1]提出了构形理论, 并将其应用到"体-点"导热问题的优化中. 为了寻求更好性能的传热结构, 许多学者在此基础上对不同的单元体形状、不同的优化目标进行了大量的研究[2~15].

最大温差最小是构形优化的主要目标之一. Bejan[1]假定用于填充的高导热材料体积一定, 以最大温差最小为目标, 首先对一矩形单元进行优化, 得到其最优外形(长宽比); 然后将若干个经过优化的矩形单元进行组合, 得到第一级构形体, 再对第一级构形体的外形(或矩形单元数目)及高导热材料的分布进行优化, 使第一级构形体的最大温差达到最小; 将类似的工作持续下去, 经过若干次组合和优化, 直至更高级的构形体能覆盖住所给控制体积. Ledezma 等人[16]在文献[1]的基础上, 针对矩形单元体高导热材料中热流密度连续增加, 去掉高导热通道等厚度这一条件, 对矩形单元内高导热通道宽度 $D_0$ 进行优化计算, 所得到的单元体热阻下降 6%, 而去掉高、低导热通道互相垂直这一条件, 则优化后所得单元体热阻可以下降 5.8%. Almogbel 和 Bejan[17]进一步提出, 如果低一级的构形体组合成高一级的构形体时去掉高导热材料均匀布置的规定, 对第一级构形体优化发现, 最优布置并非均匀, 而是相对原来位置存在偏移, 如果组成第一级构形体的单元体数目 $n_1$=6, 可使热阻下降 5.7%. Ghodoossi 和 Egrican[18]去掉文献[1]中关于高导热通道上热流密度分布的简化, 对该问题进行了精确求解, 发现文献[1]的近似解与所得精确解偏差高达 25%, 并认为热流密度连续增加的简化造成了该偏差. Wu 等人[19]对这一偏差进行了分析, 证明了偏差产生的原因在于文献[1]中的等效导热系数不等效, 而非热流密度分布的简化. 伍文君等人[20]释放"新一级构形体由最优的上一级构形体组成"的约束, 将上一级构形体的各个参数作为新的自由度, 进行了重新优化, 与文献[1]所得结果相比, 各级构形的热阻下降幅度都在 30%以上. Karakas 等人[21]提出用 $(D_0+H_0)$ 代替文献[1]中单元体宽度 $H_0$, 得到异于文

**英文版见**: Xiao Q H, Chen L G, Sun F R. Constructal entransy dissipation rate minimization for heat conduction based on a tapered element. Chinese Sci Bull, 2011, 56, doi: 10.1007/s11434-011-4554-4

献[1]的优化结果. Zhou等人[22]以变截面高导热通道矩形单元为基础对控制体进行了构形优化, 结果表明: 增加控制体内部复杂程度并不总能降低其热阻, 而是存在最佳的构造级数, 使热阻达到最小. Wei等人[23]针对多级构形组合时, 高导热通道内热流密度更接近于离散增加, 建立了基于离散变截面导热通道的构形优化模型, 结果表明通过组合得到的下级构造体的最大热阻的最小值也可以在本级通过改变导热通道的截面面积的方法得到. Neagu和 Bejan[24]设高温点沿外表均匀分布, 以最大温差最小为目标, 对变截面外形和变高导热通道单元体进行优化, 得到最优外形和高导热通道, 使单元体内形成均匀的温度场, 结果表明, 最小热阻与文献[1]所得结果比较其热阻下降了 33%, 而比仅变高导热通道优化所得结果下降了 29%, 此时体内各处热阻趋于一致. Ghodoossi 和 Egrican[25]对单元体的形状进行了改进, 提出了三角形单元, 求出了热阻最小的最优构形.

以最大温差最小为优化目标进行构形优化, 并不能反映“体-点”的平均散热性能. Guo等人[26]提出了新的物理量“㶲”(表征物体热量传递总能力)和“㶲耗散极值原理”(对于具有一定的约束条件并给定热流边界条件时, 当㶲耗散最小时, 则导热过程最优(温差最小); 在给定温度边界条件时, 㶲耗散最大, 则导热过程最优(热流最大)), 基于㶲耗散定义了多维导热问题中的当量热阻, 当量热阻反映了平均散热性能, 并从导热机理[27]、电热模拟试验[28]等方面进一步阐述了㶲的物理意义. 许多学者对这一新的物理量表示了浓厚的兴趣, 以㶲耗散最小为目标进行传热优化[29~37]. 魏曙寰等人[38~40]将㶲耗散极值原理与构形理论相结合, 以㶲耗散率最小为目标对矩形单元体进行构形优化, 在给定相同参数条件下, 发现基于㶲耗散最小的构形相对于基于最大温差最小的构形可以更加有效地降低平均温差[38]; 以㶲耗散率最小为优化目标, 对三角形单元体的“体-点”导热问题进行优化, 得到热量传递的效率最佳的构形及每一级构形的当量热阻[39]; 并在文献[20]的基础上得到了释放了“新一级形体由最优的上级构形组成”约束条件的以㶲耗散最小为目标的最优构形[40]. 魏曙寰等人[41]进一步以㶲耗散率最小为优化目标, 导出了电磁体的平均温差的表达式, 并将磁场强度问题与传热问题相结合, 对电磁体进行了多学科构形优化. 谢志辉等人[42,43]以㶲耗散最小对含矩形空腔或 T 形开口空腔的发热体进行优化, 结果表明, 相对于以最大温差最小为目标, 以㶲耗散率最小为优化目标更能有效降低传热平均温差, 改善系统整体传热性能, 两者对比显示空腔自由度越大, 系统性能更佳. Chen等人[44]以㶲耗散率最小为优化目标, 优化了圆盘导热问题.

本文将针对文献[24]提出的外形、高导热通道截面都变化的单元体, 以㶲耗散率最小为目标进行构形优化, 获得给定控制体的平均温差解析式以及单元体和高导热通道最优外形, 并与文献[24]基于最大温差最小的优化结果进行比较, 得到一些有意义的结论.

## 1 㶲耗散率的定义

文献[26]中定义了一物体所具有的热量传递的总能力-物理量㶲($E_{vh}$):

$$E_{vh}=\frac{1}{2}Q_{vh}T, \tag{1}$$

式中 $Q_{vh}$ 为物体的定容热容量, $T$ 是温度, 即热势. 由此得到了单位时间单位体积内㶲的耗散, 称为㶲耗散函数 $\dot{E}_{h\phi}$:

$$\dot{E}_{h\phi}=-\dot{q}\cdot\nabla T, \tag{2}$$

式中 $\dot{q}$ 为热流密度矢量, $\nabla T$ 是温度梯度. 在稳态时, 可写为控制体内输入的㶲减去输出的㶲:

$$\dot{E}_{h\phi}=\dot{E}_{h,in}-\dot{E}_{h,out}. \tag{3}$$

在导热问题中, 整个体积中的㶲耗散率 $\dot{E}_{vh\phi}$ 为

$$\dot{E}_{vh\phi}=\int_{v}\dot{E}_{h\phi}\mathrm{d}v. \tag{4}$$

在此基础之上, 可得到给定热流边界条件的多维导热问题, 物体的当量热阻 $R_h$ 为

$$R_h=\dot{E}_{vh\phi}\big/\dot{Q}_h^2, \tag{5}$$

式中 $\dot{Q}_h$ 是热流. 则多维导热问题的平均温差可以表示为

$$\Delta\overline{T}=R_h\dot{Q}_h. \tag{6}$$

## 2 单元体优化

如图 1 所示[24], 单元体内各点均匀产热(产热率

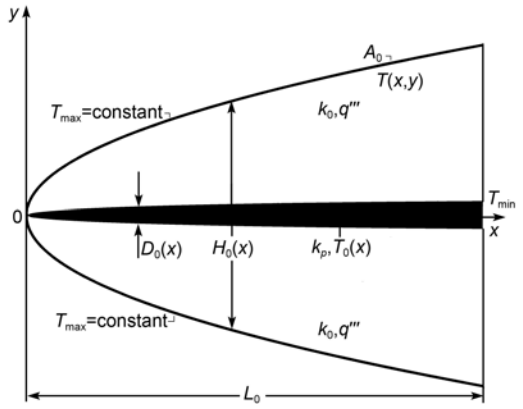


**图 1　变外形单元体[24]**

$q'''$ (W/m$^3$), 可视为均匀内热源), 该单元体中的热流汇聚到高导热材料(导热系数为 $k_p$, 其余部分导热系数为 $k_0$, $k_p \gg k_0$)组成的路径中, 沿 $x$ 方向导热通道的宽度 $D_0$ 变化, 用 $D_0(x)$表示, $D_0(x)$为连续变截面高导热通道. 热流从 $x=L_0$ 和 $y=0$ 处($M_0$ 点)流出, $A_0$ 边界的其余部分是绝热的. 热流连续, 最热点 $T_{\max}$ 分布在除 $M_0$ 点外的单元体边界上, 边界由 $y=\pm H_0(x)/2$ 确定. 为了得到解析解, 假设 $H_0(x)/L_0 \ll 1$, 则在 $k_0$ 材料中导热方向可认为平行于 $y$ 轴, 而在 $k_p$ 中导热沿 $x$ 轴.

$k_0$ 材料中的导热微分方程为[24]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{q'''}{k_0}=0, \tag{7}$$

边界条件为

$$\partial T/\partial y=0,\ y=\pm\frac{H_0}{2}, \tag{8}$$

$$T=T_0(x),\ y=0, \tag{9}$$

式中, $T_0(x)$是 $k_p$ 条状路径中心的温度. 求解式(7)得, 当 $y>0$ 时

$$T(x,y)=\frac{q'''}{2k_0}\left(-y^2+H_0 y\right)+T_0(x). \tag{10}$$

设 $y=\pm H_0/2$ 时, $T=T_{\max}$, 则

$$T_{\max}-T_0(x)=\frac{q'''H_0^2}{8k_0}. \tag{11}$$

$k_p$ 通道中的导热微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k_p D_0\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}x}\right)+q'''H_0=0, \tag{12}$$

对应的边界条件为

$$\partial T_0/\partial x=0,\ x=0, \tag{13}$$

$$T_0=T_{\min},\ x=L_0. \tag{14}$$

由式(11)和(12)消去 $T_0(x)$可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\tilde{k}D_0H_0}{4}\frac{\mathrm{d}H_0}{\mathrm{d}x}\right)=H_0, \tag{15}$$

式中, $\tilde{k}=k_p/k_0\gg 1$, 为两种材料的导热系数之比. 设 $H_0$ 和 $D_0$ 函数遵守幂指数规律 $H_0=c_0x^m$, $D_0=b_0x^n$, 式中, $c_0$ 和 $b_0$ 是常数, $m$ 和 $n$ 是无因次幂指数. 由文献[24]可知

$$\frac{\tilde{k}b_0c_0m(2m+n-1)}{4}=1, \tag{16}$$

$$m+n=2, \tag{17}$$

进而有[24]

$$c_0=\frac{2L_0^{1-m}}{\left[\tilde{k}\phi_0 m(3-m)\right]^{1/2}}, \tag{18}$$

$$b_0=\frac{2\left[\phi_0(3-m)\right]^{1/2}L_0^{m-1}}{\left(\tilde{k}m\right)^{1/2}(m+1)}. \tag{19}$$

解微分方程式(12)可得到高导热通道 $k_p$ 中温度分布为

$$T_0(x)=\frac{c_0q'''}{b_0k_p(m+1)(m-n+2)}\left(L_0^{m-n+2}-x^{m-n+2}\right)+T_{\min}. \tag{20}$$

由式(10)和(20)消去 $T_0(x)$可得单元体中 $y>0$ 时的温差分布:

$$\begin{aligned}T(x,y)-T_{\min}=&\frac{q'''}{2k_0}\left(-y^2+H_0y\right)\\&+\frac{c_0q'''}{b_0k_p(m+1)(m-n+2)}\\&\times\left(L_0^{m-n+2}-x^{m-n+2}\right).\end{aligned} \tag{21}$$

由于温度关于 $x$ 轴对称分布, 当 $y<0$ 时, 式(21)中的 $H_0$ 由 $-H_0$ 代替. 单元体内的热耗散率为

$$\begin{aligned}\dot{E}_{vh\phi 0}&=2\int_0^{L_0}\int_0^{\frac{H_0}{2}}q'''\left[T(x,y)-T_{\min}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{q'''^2A_0^2(m+1)(4m+1)}{6k_0\sqrt{\tilde{k}\phi_0}(3m+1)\sqrt{m(3-m)}}.\end{aligned} \tag{22}$$

由 $\mathrm{d}\dot{E}_{vh\phi 0}/\mathrm{d}m=0$ 且 $m$ 为实数得

$$m_{\mathrm{opt}}=1/2, \tag{23}$$

从而最小㶲耗散率为

$$\dot{E}_{vh\phi 0,\mathrm{m}}=\frac{3}{5\sqrt{5}}A_0^2q'''^2k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}. \tag{24}$$

对应的单元体的最小当量热阻和平均温差为

$$R_{h0,\mathrm{m}}=\frac{3}{5\sqrt{5}}k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}, \tag{25}$$

$$\Delta\bar{T}_0=\frac{3}{5\sqrt{5}}A_0q'''k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}. \tag{26}$$

单元体的最优构形为

$$H_{0,\mathrm{opt}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\frac{L_0}{\tilde{k}\phi_0}x\right)^{1/2}, \tag{27}$$

$$D_{0,\mathrm{opt}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{\phi_0}{\tilde{k}L_0}}x^{3/2}, \tag{28}$$

$$\left(\frac{H_{0,\mathrm{base}}}{L_0}\right)_{\mathrm{opt}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}\ll 1, \tag{29}$$

$$\frac{D_{0,\mathrm{base}}}{H_{0,\mathrm{base}}}=\frac{5}{3}\phi_0. \tag{30}$$

从而得到最优单元体, 如图 2 所示. 式(29)表明当 $\tilde{k}\phi_0\gg 16/5=3.2$ 时满足假设条件 $H_0(x)/L_0\ll 1$. 截面积 $A_0$ 与其外切矩形 $L_0\times H_{0,\mathrm{base}}$ 面积之比为 $1/(m+1)=2/3$, 显然与 $\tilde{k}\phi_0$ 大小无关.

基于㶲耗散率最小的单元体的最优外形为 $H_0\propto x^{1/2}$, $D_0\propto x^{3/2}$, 其平均温差和最大温差分别为

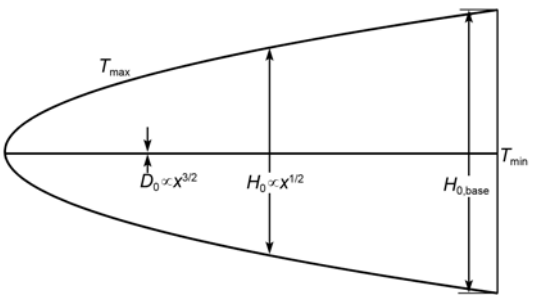


**图 2 最优单元体**

$$\Delta\bar{T}_0=\frac{3}{5\sqrt{5}}A_0q'''k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}=0.2683A_0q'''k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}, \tag{31}$$

$$\Delta T_{0,\max}=\frac{3}{4\sqrt{5}}A_0q'''k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}=0.3354A_0q'''k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}. \tag{32}$$

而文献[24]基于最大温差最小得到的单元体的最优外形为 $H_0\propto x^{3/5}$, $D_0\propto x^{7/5}$, 其平均温差和最大温差分别为

$$\Delta\bar{T}_0'=\frac{17}{63}A_0q'''k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}=0.2698A_0q'''k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}, \tag{33}$$

$$\Delta T_{0,\max}'=\frac{1}{3}A_0q'''k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}=0.3333A_0q'''k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}. \tag{34}$$

## 3 第一级构造体优化

文献[24]将许多单元体按照图 3 的形式进行组合, 每个单元体均满足式(29), 顶端在曲线 $y=\pm H_1(x)/2$ 上, 其单元体截面积 $A_0(x)$和它产生的热流 $q'''A_0$决定于单元体在 $x$ 轴的位置. 单元体中的热流汇聚到导热系数为 $k_p$ 的高导热材料组成的路径中, 沿 $x$ 方向导热通道的宽度 $D_1$ 变化, $D_1(x)$为连续变截面高导热通道. Wu 等人[45]指出若以最大温差最小为优化目标, 则等效前后单元体的最大温差应相等, 本文以㶲耗散率最小为优化目标, 则等效前后的单元体的㶲耗散率 $\dot{E}_{vh\phi 0}$,

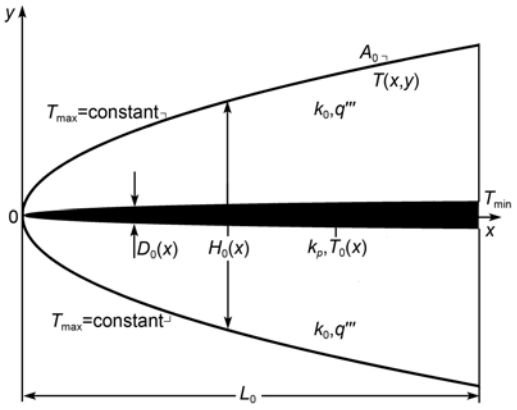


**图 3 第一级构造体[24]**

$\dot{E}'_{vh\phi 0}$ 也应相等，$\dot{E}_{vh\phi 0}$ 和 $\dot{E}'_{vh\phi 0}$ 分别为

$$\dot{E}_{vh\phi 0}=\frac{3}{5\sqrt{5}}A_0^2q'''^2k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}=\frac{64}{75\sqrt{5}}q'''^2k_0^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-3/2}L_0^4, \tag{35}$$

$$\dot{E}'_{vh\phi 0}=2q'''\int_0^{L_0}\int_0^{H_0/2}\frac{q'''}{k_1}\left(-\frac{x^2}{2}+L_0x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{36}{35\sqrt{5}}q'''^2k_1^{-1}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}L_0^4. \tag{36}$$

令二者相等可得等效导热系数:

$$k_1=a_1k_p\phi_0, \tag{37}$$

式中, $a_1$=135/112.

$k_p$ 通道中的导热微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k_pD_1\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{2}{3}q'''H_1=0, \tag{38}$$

式中, 因子 2/3 反映了第一级构造体中单元体在分配区域的密度. 设 $H_1$ 和 $D_1$ 函数同样服从幂指数规律

$$H_1=c_1x^m,\ D_1=b_1x^n, \tag{39}$$

式中, $c_1$ 和 $b_1$ 是常数, $m$ 和 $n$ 是无因次幂指数. 类似于式(15), 有

$$\frac{k_pb_1c_1m(2m+n-1)}{4k_1}x^{2m+n-2}=\frac{2}{3}x^m, \tag{40}$$

从而可得

$$\frac{k_pb_1c_1m(2m+n-1)}{4k_1}=\frac{2}{3}, \tag{41}$$

$$m+n=2. \tag{42}$$

第一级构造体截面积为

$$A_1=\int_0^{L_1}\frac{2}{3}H_1(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\frac{c_1L_1^{m+1}}{m+1}. \tag{43}$$

沿 $x$ 方向 $k_p$ 通道的面积为

$$A_{p,1}=\int_0^{L_1}D_1(x)\mathrm{d}x+A_1\phi_0=\frac{b_1L_1^{n+1}}{n+1}+A_1\phi_0, \tag{44}$$

则

$$\phi_1=\frac{A_{p,1}}{A_1}=\frac{3b_1(m+1)L_1^{n-m}}{2c_1(n+1)}+\phi_0. \tag{45}$$

根据式(21)同样可得第一级构造体中 $y$>0 时的温差分布

$$T(x,y)-T_{\min}=\frac{q'''}{2k_1}\left(-y^2+H_1y\right)+\frac{2c_1q'''}{3b_1k_p(m+1)(m-n+2)}\times\left(L_1^{m-n+2}-x^{m-n+2}\right). \tag{46}$$

由于温度关于 $x$ 轴对称分布, 当 $y$<0 时, 式(46)中的 $H_1$ 由−$H_1$ 代替. 第一级构造体的㶲耗散率为

$$\dot{E}_{vh\phi 1}=2\int_0^{L_1}\int_0^{\frac{H_1}{2}}\frac{2}{3}q'''\left[T(x,y)-T_{\min}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{q'''^2A_1^2(m+1)(4m+1)}{4k_p(3m+1)\sqrt{m(3-m)}}\left[a_1(\phi_1-\phi_0)\phi_0\right]^{-1/2}. \tag{47}$$

以 $m$ 为自变量, 对式(47)进行优化得到

$$m_{\mathrm{opt}}=1/2, \tag{48}$$

相应的最小㶲耗散率为

$$\dot{E}_{vh\phi 1,\mathrm{m}}=\frac{2\sqrt{21}A_1^2q'''^2}{25k_p\sqrt{\phi_0(\phi_1-\phi_0)}}. \tag{49}$$

由式(49)可知, 随着 $\phi_0$ 和 $\phi_1$ 的增大, $\dot{E}_{vh\phi 1,\mathrm{m}}$ 更小. 当 $k_p$ 材料的总量一定时(即 $\phi_1$=常数), 以 $\phi_0$ 为自变量, 对式(49)进一步优化可得

$$\phi_{0,\mathrm{opt}}=\phi_1/2, \tag{50}$$

相应的㶲耗散率为

$$\dot{E}_{vh\phi 1,\mathrm{mm}}=\frac{4\sqrt{21}A_1^2q'''^2}{25k_p\phi_1}, \tag{51}$$

对应的第一级构造体的最小当量热阻和平均温差分别为

$$R_{h1,\mathrm{mm}}=\frac{4\sqrt{21}}{25k_p\phi_1}, \tag{52}$$

$$\Delta\overline{T}_1=\frac{4\sqrt{21}A_1q'''}{25k_p\phi_1}. \tag{53}$$

第一级构造体的最优构形为

$$H_{1,\mathrm{opt}}=\frac{3\sqrt{21}}{7}(L_1x)^{1/2}, \tag{54}$$

$$D_{1,\mathrm{opt}}=\frac{5\sqrt{21}}{21\sqrt{L_1}}\phi_1 x^{3/2}, \tag{55}$$

$$\left(\frac{H_{1,\mathrm{base}}}{L_1}\right)_{\mathrm{opt}}=\frac{3\sqrt{21}}{7}, \tag{56}$$

$$\frac{D_{1,\mathrm{base}}}{H_{1,\mathrm{base}}}=\frac{5}{9}\phi_1. \tag{57}$$

从而得到最优第一级构造体, 如图 4 所示. 由式(56)可知 $H_{1,\mathrm{base}}/L_1=3\sqrt{21}/7\doteq 1.96>1$. 由于单元体中存在高导热通道, 所以 $k_1$ 材料中导热方向可认为垂直于第一级构造体中的高导热通道 $D_1$, 没有必要假设 $H_1(x)/L_1\ll 1$.

基于熵耗散率最小的第一级构造体的最优外形为 $H_1\propto x^{1/2}$, $D_1\propto x^{3/2}$, 其平均温差和最大温差分别为

$$\Delta\bar{T}_1=\frac{4\sqrt{21}A_1q'''}{25k_p\phi_1}=0.7332\frac{A_1q'''}{k_p\phi_1}, \tag{58}$$

$$\Delta T_{1,\max}=\frac{\sqrt{21}A_1q'''}{5k_p\phi_1}=0.9165\ \frac{A_1q'''}{k_p\phi_1}. \tag{59}$$

而文献[24]基于最大温差最小的第一级构造体的最优外形 $H_1\propto x^{3/5}$, $D_1\propto x^{7/5}$, 其平均温差和最大温差分别为

$$\Delta\bar{T}_1'=\frac{68A_1q'''}{9\sqrt{105}k_p\phi_1}=0.7373\frac{A_1q'''}{k_p\phi_1}, \tag{60}$$

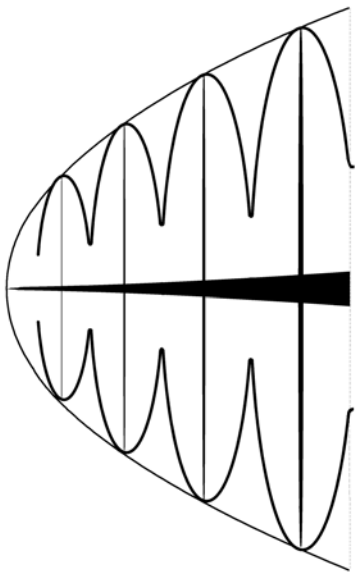

图 4 最优第一级构造体

$$\Delta T_{1,\max}'=\frac{8A_1q'''}{9k_p\phi_1}=0.8889\frac{A_1q'''}{k_p\phi_1}. \tag{61}$$

在单元体与第一级构造体间具有相同基准的情况下, 即 $A_0=A_1=A$, $\phi_0=\phi_1=\phi$时, 有

$$\Delta\bar{T}_0\big/\Delta\bar{T}_1=\frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{21}}\left(\tilde{k}\phi\right)^{1/2}. \tag{62}$$

图 5 给出了单元体平均传热温差与一级构造体平均传热温差的比较. 当 $\tilde{k}\phi>112/15\approx 7.47$ 时, $\Delta\bar{T}_0/\Delta\bar{T}_1>1$, 采用一级构造体设计的平均传热温差小于采用单元体设计的平均传热温差; 当 $\tilde{k}\phi<7.47$ 时, $\Delta\bar{T}_0/\Delta\bar{T}_1<1$, 采用单元体设计的平均传热温差小于采用一级构造体设计的平均传热温差, 而由上节可知满足假设条件 $H_0(x)/L_0\ll 1$ 时 $\tilde{k}\phi>3.2$. $\tilde{k}\phi=7.47$ 是临界点, 当两种材料导热系数之比和高导热材料所占体积比的乘积大于 3.2 且小于 7.47 时, 应对所给控制体内部结构采用单元体优化设计; 而当该乘积大于 7.47 时, 则应该增加内部复杂度, 采用一级构造体优化设计.

## 4 第二级构造体优化

将许多第一级构造体按照图 6 的形式[24]进行组合, 其顶端在曲线 $y=\pm H_2(x)/2$ 上, 热流汇聚到导热系数为 $k_p$ 的高导热材料组成的路径中, 沿 $x$ 方向导热通道的宽度 $D_2$ 变化, $D_2(x)$为连续变截面高导热通道. 假设 $H_2(x)/L_2\ll 1$, 则在 $k_2$ 材料中导热方向可认为平行于 $y$ 轴, 而在 $k_p$ 通道中导热沿 $x$ 轴.

以熵耗散率最小为优化目标, 则等效前后第一

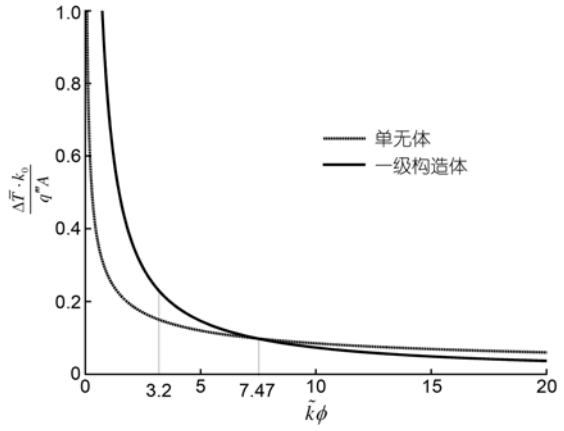


图 5 单元体与一级构造体平均温差比较

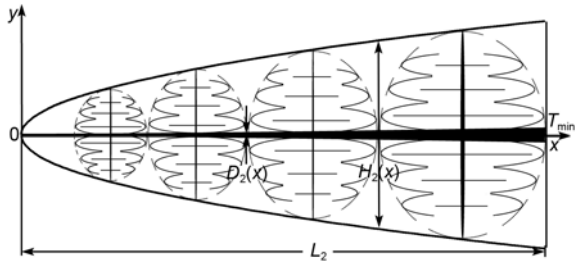


**图 6　第二级构造体[24]**

级构造体的㶲耗散率 $\dot{E}_{vh\phi 1}$，$\dot{E}'_{vh\phi 1}$ 应该相等，$\dot{E}_{vh\phi 1}$ 和 $\dot{E}'_{vh\phi 1}$ 分别为

$$\dot{E}_{vh\phi 1}=\frac{4\sqrt{21}A_1^2q'''^2}{25k_p\phi_1}=\frac{64\sqrt{21}q'''^2L_1^4}{525\phi_1k_p}, \tag{63}$$

$$\dot{E}'_{vh\phi 1}=2q'''\int_0^{L_1}\int_0^{H_1/2}\frac{2}{3}\frac{q'''}{k_2}\left(-\frac{x^2}{2}+L_1x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =\frac{18\sqrt{21}q'''^2L_1^4}{245k_2}. \tag{64}$$

令二者相等可得等效导热系数:

$$k_2=a_2k_p\phi_1, \tag{65}$$

式中，$a_2=135/224$．同前两节的方法类似，可得

$$\dot{E}_{vh\phi 2}=2\int_0^{\frac{H_2}{2}}\int_0^{L_2}\left(\frac{2}{3}\right)^2q'''\left[T(x,y)-T_{\min}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =\frac{3q'''^2A_2^2(m+1)(4m+1)}{8k_p(3m+1)\sqrt{m(3-m)}}\left[a_2(\phi_2-\phi_1)\phi_1\right]^{-1/2}, \tag{66}$$

式中，$\phi_2=A_{p,2}/A_2$ 为第二级构造体中高导热材料所占面积比，$A_2=\int_0^{L_2}\left(\frac{2}{3}\right)^2H_2(x)\mathrm{d}x$ 为第二级构造体截面积，$A_{p,2}=\int_0^{L_2}D_2(x)\mathrm{d}x+A_2\phi_1$ 为沿 $x$ 方向的 $k_p$ 通道的面积，$(2/3)^2$ 反映了产热材料($A_2$)占安放第二级构造体的体积分数．对式(66)进行优化得到

$$m_{\mathrm{opt}}=1/2, \tag{67}$$

$$\phi_{1,\mathrm{opt}}=\phi_2/2. \tag{68}$$

第二级构造体的最小㶲耗散率为

$$\dot{E}_{vh\phi 2,\mathrm{mm}}=\frac{6\sqrt{42}A_2^2q'''^2}{25k_p\phi_2}, \tag{69}$$

对应的第二级构造体的最小当量热阻和平均温差为

$$R_{h2,\mathrm{mm}}=\frac{6\sqrt{42}}{25k_p\phi_2}, \tag{70}$$

$$\Delta\bar{T}_2=\frac{6\sqrt{42}A_2q'''}{25k_p\phi_2}. \tag{71}$$

第二级构造体的最优构形为

$$H_{2,\mathrm{opt}}=\frac{3\sqrt{42}}{14}(L_2x)^{1/2}, \tag{72}$$

$$D_{2,\mathrm{opt}}=\frac{5\sqrt{42}}{63\sqrt{L_2}}\phi_2x^{3/2}, \tag{73}$$

$$\left(\frac{H_{2,\mathrm{base}}}{L_2}\right)_{\mathrm{opt}}=\frac{3\sqrt{42}}{14}\approx 1.39, \tag{74}$$

$$\frac{D_{2,\mathrm{base}}}{H_{2,\mathrm{base}}}=\frac{10}{27}\phi_2. \tag{75}$$

从式(74)可以看出，第二级构造体并不满足假设条件 $H_2(x)/L_2\ll 1$．所以需要对第二级构造体进行改进，下文将对改进的第二级构造体进行具体分析.

如图 7 所示[24]，第二级构造体由两个第一级构造体组成，其截面积为 $A_2$=2$A_1$．两个第一级构造体的热流($q_1'$=2$q'''A_1$)汇聚到沿 $x$ 轴的 $k_p$ 通道，从 $M$ 点流出:

$$q_1'=k_pD_2\frac{T_c-T_{\min}}{H_{1,\mathrm{base}}/2}, \tag{76}$$

从而沿 $x$ 轴的 $k_p$ 通道的㶲耗散率为

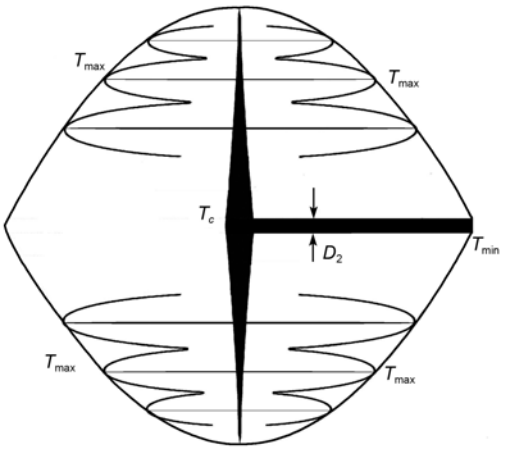


**图 7　改进的第二级构造体**

$$\dot{E}_{kp}=q_1'\left(T_c-T_{\min}\right)=\frac{2q'^2A_1^2H_{1,\text{base}}}{k_pD_2}. \tag{77}$$

第二级构造体的㶲耗散率为各第一级构造体的㶲耗散率与沿 $x$ 轴的 $k_p$ 通道的㶲耗散率之和:

$$\dot{E}_{vh\phi 2}=\frac{2q'''^2A_1^2}{k_p}\left(\frac{H_{1,\text{base}}}{D_2}+\frac{2\sqrt{21}}{25\phi_1}\right). \tag{78}$$

第二级构造体中高导热材料所占面积比为

$$\phi_2=\frac{A_{p,2}}{A_2}=\frac{\phi_1A_2+H_{1,\text{base}}D_2/2}{A_2}=\phi_1+\frac{81D_2}{16\sqrt{21}H_{1,\text{base}}}. \tag{79}$$

由式(78)和(79)消去 $H_{1,\text{base}}/D_2$, 并且以 $\phi_1$ 为自变量对式(78)进行优化得到

$$\phi_1=0.3655\phi_2, \tag{80}$$

$$\dot{E}_{vh\phi 2,\text{m}}=\frac{1.3721q'''^2A_2^2}{k_p\phi_2}, \tag{81}$$

对应的第二级构造体的最小当量热阻和平均温差为

$$R_{h2,\text{mm}}=\frac{1.3721}{k_p\phi_2}, \tag{82}$$

$$\Delta\bar{T}_2=\frac{1.3721A_2q'''}{k_p\phi_2}. \tag{83}$$

由式(79)和(80)得

$$\left(\frac{D_2}{H_{1,\text{base}}}\right)_{\text{opt}}=0.574\phi_2. \tag{84}$$

基于㶲耗散率最小的第二级构造体的最大温差为

$$\Delta T_{2,\max}=\frac{1.8464A_2q'''}{k_p\phi_2}, \tag{85}$$

而文献[24]基于最大温差最小的第二级构造体的平均温差和最大温差分别为

$$\Delta\bar{T}_2'=\frac{1.4915A_2q'''}{k_p\phi_2}, \tag{86}$$

$$\Delta T_{2,\max}'=1.6877\frac{A_2q'''}{k_p\phi_2}. \tag{87}$$

在第一级构造体与第二级构造体之间具有相等基准的情况下, 即 $A_1=A_2=A$, $\phi_1=\phi_2=\phi$ 时, $\Delta\bar{T}_1/\Delta\bar{T}_2=0.40<1$, 显然采用一级构造体设计的平均传热温差小于采用二级构造体设计的平均传热温差.

## 5 优化结果及分析

从上两节的分析可以看出, 在保持总的高导热率材料比例 $\phi_i$ 和各级构造体的总面积 $A_i$ 不变($i$=0,1,2), 即在保持总的高导热率材料不变的条件下($\phi_0=\phi_1=\phi_2=\phi$及 $A_0=A_1=A_2=A$), 当 $3.2<\tilde{k}\phi<7.47$ 时, 采用单元体设计的平均传热温差小于采用一级构造体设计的平均传热温差; $\tilde{k}\phi>7.47$ 时则正好相反. 故 $\tilde{k}\phi>7.47$ 是否采用树型设计的临界点, 当两种材料导热系数之比和高导热材料所占体积比的乘积大于 3.2 且小于 7.47 时, 应对所给控制体内部结构采用单元体优化设计; 而当该乘积大于 7.47 时, 则应该增加内部复杂度, 采用一级构造体优化设计.

本文基于㶲耗散率最小对构造体进行优化, 得到与以“体-点”内最大温差最小化为优化目标[24]不同的结果. 本文得到的主要结果如表 1 所示, 文献[24]得到的基于最大温差最小的优化结果见表 2. 比较表 1 和 2 可知, 基于㶲耗散率最小的最优构形与基于最大温差最小的最优构形是不同的. 这是因为变截面高导热通道内的热流密度是不符合线性分布的[39]. 从两表的比较还可以看出, 以最大温差最小

**表 1 㶲耗散率最小的最优构形(本文结果)**

| 构造体级数 $i$ | $\left(\frac{D_{i,\text{base}}}{H_{i,\text{base}}}\right)_{\text{opt}}$ | $\left(\frac{H_{i,\text{base}}}{L_i}\right)_{\text{opt}}$ | $\left(\frac{D_i}{H_{i-1,\text{base}}}\right)_{\text{opt}}$ | $\frac{\Delta T_{i,\max}\cdot k_p\phi_i}{q'''A_i}$ | $\frac{\Delta\bar{T}_i\cdot k_p\phi_i}{q'''A_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{5}{3}\phi_0$ | $\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}$ | – | $0.3354\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{1/2}$ | $0.2683\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{1/2}$ |
| 1 | $\frac{5}{9}\phi_1$ | $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ | – | 0.9165 | 0.7332 |
| 2 | – | – | $0.574\phi_2$ | 1.8464 | 1.3721 |

表 2 最大温差最小的最优构形(文献[24]结果)

| 构造体级数 $i$ | $\left(\frac{D_{i,\mathrm{base}}}{H_{i,\mathrm{base}}}\right)_{\mathrm{opt}}$ a) | $\left(\frac{H_{i,\mathrm{base}}}{L_i}\right)_{\mathrm{opt}}$ | $\left(\frac{D_i}{H_{i-1,\mathrm{base}}}\right)_{\mathrm{opt}}$ | $\frac{\Delta T_{i,\max}\cdot k_p\phi_i}{q'''A_i}$ | $\frac{\Delta\bar{T}_i\cdot k_p\phi_i}{q'''A_i}$ a) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{3}{2}\phi_0$ | $\frac{5}{3}\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{-1/2}$ | – | $0.3333\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{1/2}$ | $0.2698\left(\tilde{k}\phi_0\right)^{1/2}$ |
| 1 | $\frac{15}{32}\phi_1$ | 2 | – | 0.8889 | 0.7373 |
| 2 | – | – | $0.513\phi_2$ | 1.6877 | 1.4915 |

a) 由文献[24]结果导出

为优化目标时的最优构形可以使最大温差最小, 而以㶲耗散率最小为优化目标时的最优构形可获得更小的平均传热热阻, 明显地改善了系统的整体传热性能.

## 6 结论

本文应用基于变截面外形和高导热通道的㶲耗散率最小的构形方法, 对单元体进行了构形优化, 得到了单元体和高导热通道最优外形分别为 $H_0\propto x^{1/2}$, $D_0\propto x^{3/2}$, 异于文献[24]基于最大温差最小时的最优外形——$H_0\propto x^{3/5}$, $D_0\propto x^{7/5}$. 结果表明, 当增加控制体内部复杂程度时, 并不总能降低其平均传热温差, 而是存在最佳的构造级数, 使平均传热温差达到最小. 当两种材料导热系数之比和高导热材料所占体积比的乘积大于 3.2 且小于 7.47 时, 应对控制体内部结构采用单元体优化设计, 即最佳的构造级数为 0, 使得控制体平均传热温差达到最小; 而当该乘积大于 7.47 时, 则应该增加内部复杂度, 采用一级构造体优化设计, 即最佳的构造级数为 1, 使得控制体平均传热温差达到最小. 基于㶲耗散率这个物理量定义的当量热阻反映了传热过程中的导热性能, 即当量热阻越小, 则散热性能越好, 结构体内的平均温度越低, 体现了导热效率; 最小热阻反映的是“体-点”内最大温差, 体现了“体-点”允许的温度极限. 基于㶲耗散率最小导出的构形是“体-点”内平均散热性能优化的结果, 这是与文献[24]基于最大温差最小导出的结果的不同之处. 基于㶲耗散率最小的最优构形比基于最大温差最小的最优构形可以较大程度的降低平均传热温差, 明显地改善了系统传热性能. 在“体-点”导热设计中, 应结合平均传热温差和最大传热温差综合考虑传热效率和极限温度. 本文工作充分体现了㶲耗散率最小化的作用, 基于㶲——更能反映对传热能力的要求[26]——对各种导热构形问题开展进一步的研究, 是十分必要的.

## 参考文献


1 Bejan A. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. Trans ASME, J Heat Transfer, 1997, 40: 799–816
2 Bejan A. Shape and Structure, from Engineering to Nature. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
3 Bejan A, Lorente S. Thermodynamic optimization of flow geometry in mechanical and civil engineering. J Non-Equilib Thermodyn, 2001, 26: 305–354
4 周圣兵, 陈林根, 孙丰瑞. 构形理论: 广义热力学优化的新方向之一. 热科学与技术, 2004, 3: 283–292
5 Rosa R, Reis A, Miguel A. Proceedings of the Symposium Bejan's Constructal Theory of Shape and Structure. Evora: University of Evora, Portugal, 2004. 219
6 Bejan A, Lorente S. The Constructal Law (La Loi Constructale). Paris: L'Harmatan, 2005
7 Bejan A, Lorente S. Constructal multi-scale and multi-objective structures. Int J Energy Res, 2005, 29: 689–710
8 Bejan A, Lorente S, Miguel A, et al. Along with constructal theory. In: Hernandez J, Cosinschi M, eds. UNIL FGSE Workshop Series No. 1, Switzerland: University of Lausanne, Faculty of Geosciences and the Environment, 2006
9 da Silva A, Lorente S, Bejan A. Constructal multi-scale structures for maximal heat transfer density. Energy, The Int J, 2006, 31: 620–635
10 Reis A. Constructal theory: From engineering to physics, and how flow systems develop shape and structure. Appl Mech Rev, 2006, 59: 269–282

11 Bejan A, Lorente S. Constructal theory of generation of configuration in nature and engineering. J Appl Phys, 2006, 100: 041301
12 Bejan A, Marden J H. Unifying constructal theory for scale effects in running, swimming and flying. J Exp Biol, 2006, 209: 238–248
13 Bejan A, Merkx G. Constructal Theory of Social Dynamics. New York: Springer, 2007
14 Bejan A, Lorente S. Design with Constructal Theory. New Jersey: Wiley, 2008
15 Bejan A, Lorente S, Miguel A, et al. Constructal Human Dynamics, Security & Sustainability. Amsterdam: IOS Press, 2009
16 Ledezma G, Bejan A, Errera M. Constructal tree networks for heat transfer. J Appl Phys, 1997, 82: 89–100
17 Almogbel M, Bejan A. Constructal optimization of nonuniformly distributed tree-shaped flow structures for conduction. Int J Heat Mass Transfer, 2001, 44: 4185–4194
18 Ghodoossi L, Egrican N. Exact solution for cooling of electronics using constructal theory. J Appl Phys, 2003, 93: 4922–4929
19 Wu W, Chen L, Sun F. On the “area to point” flow problem based on constructal theory. Energy Convers Mgmt, 2007, 48: 101–105
20 伍文君, 陈林根, 孙丰瑞. 导热优化的“树网”构造法的改进. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2006, 36: 773–781
21 Karakas A, Camdali U, Tunc M. Constructal optimization of heat generating volumes. Int J Energy, 2009, 6: 637–654
22 Zhou S, Chen L, Sun F. Optimization of constructal volume-point conduction with variable cross-section conducting path. Energy Convers Mgmt, 2007, 48: 106–111
23 Wei S, Chen L, Sun F. The volume-point constructal optimization for discrete variable cross-section conducting path. Appl Energy, 2009, 86: 1111–1118
24 Neagu M, Bejan A. Constructal-theory tree networks of “constant” thermal resistance. J Appl Phys, 1999, 86: 1136–1144
25 Ghodoossi S, Egrican N. Conductive cooling of triangular shaped electronics using constructal theory. Energy Convers Mgmt, 2004, 45: 811–828
26 Guo Z, Zhu H, Liang X. Entransy—A physical quantity describing heat transfer ability. Int J Heat Mass Transfer, 2007, 50: 2545–2556
27 韩光泽, 过增元. 导热能力损耗的机理及其数学表述. 中国电机工程学报, 2007, 27: 98–102
28 朱宏晔, 陈泽敬, 过增元. 熵耗散极值原理的电热模拟实验研究. 自然科学进展, 2007, 17: 1692–1698
29 程新广, 孟继安, 过增元. 导热优化中的最小传递势容耗散与最小熵产. 工程热物理学报, 2005, 26: 1034–1036
30 陈群, 任建勋. 对流换热过程的广义热阻及其与熵耗散的关系. 科学通报, 2008, 53: 1730–1736
31 柳雄斌, 过增元, 孟继安. 换热器中的熵耗散与热阻分析. 自然科学进展, 2008, 18: 1186–1190
32 宋伟明, 孟继安, 梁新刚, 等. 一维换热器中温差场均匀性原则的证明. 化工学报, 2008, 59: 2460–2464
33 柳雄斌, 孟继安, 过增元. 换热器参数优化中的熵产极值和熵耗散极值. 科学通报, 2008, 52: 3026–3029
34 吴晶, 梁新刚. 熵耗散极值原理在辐射换热优化中的应用. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39: 272–277
35 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 换热器熵耗散最小优化. 科学通报, 2009, 54: 2240–2246
36 王松平, 陈清林, 张冰剑. 熵传递方程及其应用. 科学通报, 2009, 54: 2247–2251
37 Chen Q, Wang M, Pan N, et al. Optimization principles for convective heat transfer. Energy, 2009, 34: 1199–1206
38 魏曙寰, 陈林根, 孙丰瑞. 基于矩形单元体的以熵耗散最小为目标的“体点”导热构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39: 278–285
39 Wei S, Chen L, Sun F. Constructal entransy dissipation minimization for “volume-point” heat conduction based on triangular element. Therm Sci, 2010, 14: 1075–1088
40 Wei S, Chen L, Sun F. Constructal entransy dissipation minimization for “volume-point” heat conduction without the premise of optimized last-order construct. Int J Exergy, 2010, 7: 627–639
41 魏曙寰, 陈林根, 孙丰瑞. 以熵散最小为目标的电磁体多学科构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39: 1606–1613
42 谢志辉, 陈林根, 孙丰瑞. 以熵耗散最小为目标的空腔几何构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39: 1949–1957
43 谢志辉, 陈林根, 孙丰瑞. T 形腔熵耗散最小构形优化. 科学通报, 2009, 54: 2605–2612
44 Chen L, Wei S, Sun F. Constructal entransy dissipation rate minimization of a disc. Int J Heat Mass Transfer, 2011, 54: 210–216
45 Wu W, Chen L, Sun F. On the “area to point” flow problem based on constructal theory. Energy Convers Mgmt, 2007, 48: 101–105