科学通报
第40卷 第21期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1995年 11月

动态时空中的补偿效应*

赵 峥
(北京师范大学物理系，北京 100875)
黎忠恒
(甘肃省庆阳师范专科学校物理系，西峰 745000)

关键词 Vaidya黑洞 动态黑洞 补偿场 尺度变换 热效应

在文献[1, 2]中，我们已经指出，Hawking-Unruh量子热效应，可以看作坐标尺度变换下的补偿效应[3]，相应的温度可以看作补偿场的纯规范势．本文以Vaidya黑洞为例[4]，把上述观点推广到动态时空．

1 静态史瓦西时空

众所周知，静态史瓦西线元

$$dS^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1}$$

在通常的Kruskal坐标变换下，

$$\begin{aligned}\widetilde{T}&=(r/2M-1)^{1/2}e^{\kappa r}\mathrm{sh}\kappa t=e^{\kappa r_*}\mathrm{sh}\kappa t,\\ \widetilde{R}&=(r/2M-1)^{1/2}e^{\kappa r}\mathrm{ch}\kappa t=e^{\kappa r_*}\mathrm{ch}\kappa t.\end{aligned} \tag{2}$$

可写成如下熟知的形式：

$$dS^2=(32M^3/r)e^{-2\kappa r}(-d\widetilde{T}^2+d\widetilde{R}^2)+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{3}$$

式中r_*为乌龟坐标，r_H是视界位置，κ是视界表面重力，

$$r_*=r+(1/2\kappa)\ln[(r-r_H)/r_H],\ \kappa=1/4M,\ r_H=2M, \tag{4}$$

利用(4)式，还可把线元(1)式写成如下形式：

$$dS^2=(r_H/r)e^{2\kappa(r_*-r)}(-dt^2+dr_*^2)+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{5}$$

如果把Kruskal变换稍加改造，令

$$T=\frac{1}{\kappa}e^{\kappa r_*}\mathrm{sh}\kappa t,\ R=\frac{1}{\kappa}e^{\kappa r_*}\mathrm{ch}\kappa t, \tag{6}$$

则线元(3)式可重写为

$$dS^2=(r_H/r)e^{-2\kappa r}(-dT^2+dR^2)+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{7}$$

令

1995-03-28收稿，1995-06-16收修改稿
*国家自然科学基金和国家教委留学回国人员资助项目

$$\Omega_1^2=(r_H/r)e^{-2\kappa r},\ \Omega_2^2=(r_H/r)e^{2\kappa(r_*-r)}, \tag{8}$$

则四维时空的二维 $(t,\ r)$ 截面上的线元可写成

$$\begin{aligned} ds^2&=\Omega_1^2(-dT^2+dR^2)=-\Omega_1^2dUdV=\Omega_1^2(-dV^2+2dVdR),\\ ds^2&=\Omega_2^2(-dt^2+dr_*^2)=\Omega_2^2dudv=\Omega_2^2(-dv^2+2dvdr_*), \end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned} U&=T-R,\ V=T+R,\\ u&=t-r_*,\ v=t+r_*. \end{aligned} \tag{10}$$

$U,\ V$ 为类光 Kruskal 坐标；u、v 为 Eddington-Finkelstein 坐标．(9) 式所示的两个线元都显式共形于二维闵氏时空．定义

$$\Omega^2=\Omega_2^2/\Omega_1^2=e^{2\kappa r_*}, \tag{11}$$

则从文献[1, 2] 可知，坐标变换诱导出一个共形等度规映射

$$-dt^2+dr_*^2=e^{-2\kappa r_*}(-dT^2+dR^2) \tag{12}$$

或

$$dudv=e^{-2\kappa r_*}dUdV;\ -dv^2+2dvdr_*=e^{-2\kappa r_*}(-dV^2+2dVdR).$$

它可以归结为坐标长度的尺度基准不仅在各时空点不同，而且在坐标变换下也发生变化[1, 2]．κ 正是坐标变换下尺度基准改变引入的补偿场的纯规范势

$$\kappa=\partial\ln\Omega/\partial r_* \tag{13}$$

它本质上就是 Hawking-Unruh 温度

$$T=\kappa/2\pi K_B, \tag{14}$$

式中 K_B 是 Boltzmann 常数．

2 动态 Vaidya 时空

Vaidya 时空线元[4]

$$dS^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dv^2+2dvdr+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{15}$$

作广义乌龟坐标变换

$$r_*=r+\frac{1}{2\kappa}\ln[r-r_H(v)],\ v_*=v-v_0 \tag{16}$$

之后，可重新表述为

$$\begin{aligned} dS^2=&\frac{2\kappa(r-r_H)}{2\kappa(r-r_H)+1}\left\{\frac{-(r-2M)[2\kappa(r-r_H)+1]+2r\dot{r}_H}{2\kappa r(r-r_H)}dv_*^2+2dv_*dr_*\right\}+\\ &r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \end{aligned} \tag{17}$$

这里 $M=M(v)$, $r_H=r_H(v)$. κ 是可调节的参数，它表征黑洞温度．在静态情况，它就是黑洞的表面重力．

从零曲面方程

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}=0 \tag{18}$$

可知[5]，

$$\lim_{r\to r_H}\{(r-2M)[2\kappa(r-\dot{r}_H)+1]-2r\dot{r}_H\}=0, \tag{19}$$

由此可定出 Vaidya 黑洞的视界位置

$$r_H=2M/(1-2\dot{r}_H). \tag{20}$$

此外，调节参数 κ，使

$$\kappa=(1-2\dot{r}_H)/4M, \tag{21}$$

则有极限[5]

$$\lim_{\substack{r\to r_H\\ v\to v_0}}\frac{(r-2M)[2\kappa(r-r_H)+1]-2r\dot{r}_H}{2\kappa r(r-r_H)}=1. \tag{22}$$

由此可证明 Vaidya 黑洞发射温度为 $T=\kappa/2\pi K_B$ 的热辐射[5].

现在，按下述方式定义滞后 Eddington-Finkelstein 坐标

$$u_*=v_*-2r_*. \tag{23}$$

此定义考虑了静态史瓦西情况

$$u\equiv t-r_*,\ v\equiv t+r_*, \tag{24}$$

在静态情况下 u_*, v_* 能回到 u, v.

利用(16)式和(23)式，可把(17)式改写为

$$dS^2=\frac{2\kappa e^{2\kappa(r_*-r)}}{2k(r-r_H)+1}\left[1-\frac{(r-2M)[2k(r-r_H)+1]-2r\dot{r}_H}{2kr(r-r_H)}\right]dv_*^2-$$
$$\frac{2\kappa e^{2\kappa(r_*-r)}}{2k(r-r_H)+1}\,dv_*du_*+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{25}$$

这里用了 $(r-r_H)=e^{2\kappa(r_*-r)}$. 再定义广义类光 Kruskal 坐标

$$U_*=-\frac{1}{k}e^{-\kappa u_*},\ V_*=\frac{1}{k}e^{kv_*}, \tag{26}$$

则有

$$dU_*dV_*=e^{2kr_*}du_*dv_*. \tag{27}$$

线元(25)可写成

$$dS^2=\frac{2\kappa e^{2k(r_*-r)}}{2\kappa(r-r_H)+1}\left[1-\frac{(r-2M)[2\kappa(r-r_H)+1]-2r\dot{r}_H}{2\kappa r(r-r_H)}\right]dv_*^2-$$
$$\frac{2\kappa e^{-2kr}}{2\kappa(r-r_H)+1}\,dU_*dV_*+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{28}$$

定义

$$\Omega_1^2=\frac{2\kappa e^{-2kr}}{2\kappa(r-r_H)+1},\qquad \Omega_2^2=\frac{2\kappa e^{2k(r_*-r)}}{2\kappa(r-r_H)+1}, \tag{29}$$
$$\Omega^2=\Omega_2^2/\Omega_1^2=e^{2kr_*}.$$

从极限(22)式可知，在 $r\to r_H$ 时，线元(25)和(28)式分别趋于

$$dS^2\to-\Omega_2^2du_*dv_*+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2),$$
$$dS^2\to-\Omega_1^2dU_*dV_*+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{30}$$

其中二维线元

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\Omega_2^2 du_* dv_*, \\ ds^2 &= -\Omega_1^2 dU_* dV_*, \end{aligned} \tag{31}$$

分别显式共形于二维闵氏时空，并满足共形等度规映射

$$du_* dv_* = e^{-2kr_*} dU_* dV_*. \tag{32}$$

定义广义 Kruskal 坐标

$$T_* = (V_* + U_*)/2, \quad R_* = (V_* - U_*)/2. \tag{33}$$

利用(23)式，可把(30)～(32)式重写为

$$\begin{cases} dS^2 \to \Omega_2^2(-dv_*^2 + 2dv_* dr_*) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \\ dS^2 \to \Omega_1^2(-dV_*^2 + 2dV_* dR_*) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2); \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} ds^2 = \Omega_2^2(-dv_*^2 + 2dv_* dr_*), \\ ds^2 = \Omega_1^2(-dV_*^2 + 2dV_* dR_*); \end{cases} \tag{35}$$

$$-dv_*^2 + 2dv_* dr_* = e^{-2kr_*}(-dV_*^2 + 2dV_* dR_*). \tag{36}$$

如果把(35)，(36)归结为坐标长度的尺度变换，则 Hawking-Unruh 温度同样以补偿场纯规范势的形式出现

$$\kappa = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial r_*}. \tag{37}$$

3 结论与讨论

动态时空中的 Hawking-Unruh 效应与静态时空情况一样，可以看作坐标尺度变换的补偿效应．量子温度以补偿场纯规范势的形式出现．

值得注意的是，在动态情况，仅在充分接近黑洞视界处，上述效应才与共形等度规映射有严格连系．即，仅当 $r \to r_H$ 时，(34)与(35)式才严格成立．

参 考 文 献

1 赵 峥，刘 辽．Hawking 效应是坐标尺度变换下的补偿效应．物理学报，1993, 42(9): 1 537

2 赵 峥．1+1 维引力理论中的 Hawing 效应是补偿效应．北京师范大学学报(自然科学版)，1994, 30(1): 51

3 Eddington A S. The Mathematical Theory of Relativity. Cambridge: Cambridge University Press, 1957. 200

4 Bonner W B, Vaidya P C. Spherically symmetric radiation of charge in Einstein-Maxwell theory. Gen Rel Grav, 1970, 1: 127

5 Zhao Zheng, Li Zhongheng. Hawking effect in Vaidya space-time. IL Nuovo Cimento, 1993, 108B(7): 785

6 Balbinot R, Barletta A. The back-reaction and the evolution of guantum black holes. Class Quantum Grav, 1989, 6: 195