研究简报

亚纯函数结合于导数的总亏量*

杨　乐

(中国科学院数学研究所,北京 100080)

关键词　亚纯函数、亏量、分支指标

一、Drasin 的几个问题

设 $f(z)$ 是开平面上的超越亚纯函数，k 为一正整数. $f(z)$ 的亏值与亏量是函数值分布论中十分重要与基本的概念[1,2]. 由于这时 $f^{(k)}(z)$ 也是超越亚纯函数，于是它也可以有亏值与亏量. 那么 $f(z)$ 的亏值与亏量和 $f^{(k)}(z)$ 的亏值与亏量间是否存在什么联系呢?

若 $f(z)$ 是有穷级整函数，则从 Nevanlinna 第二基本定理[1,2]易于得到

$$\sum_{a\in C}\delta(a,f)\leqslant\delta(0,f^{(k)}),$$

其中 $\sum_{a\in C}\delta(a,f)$ 表示 $f(z)$ 的全体有穷亏值的总亏量. 若 $f(z)$ 是有穷级亚纯函数，则不难证明

$$\begin{aligned}\sum_{a\in C}\delta(a,f)&\leqslant(k+1-\Theta(\infty,f))\delta(0,f^{(k)})\\&\leqslant(k+1-\delta(\infty,f))\delta(0,f^{(k)}),\end{aligned}\tag{1}$$

这里 $\Theta(\infty,f)$ 是值∞关于 $f(z)$ 的分支指标，由

$$\Theta(\infty,f)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{\bar N(r,f)}{T(r,f)}$$

定义. 于是当有穷级亚纯函数 $f(z)$ 适合条件 $\sum_{a\in C}\delta(a,f)=2$ 时便有 $\delta(0,f')=1$. 一个自然的问题是 $f'(z)$ 还有其他亏值吗?

Drasin[3] 研究了一些具体例子后，提出了以下的猜测与问题.

(A) 若 $f(z)$ 是开平面上的有穷级亚纯函数，且适合

$$\sum_{a\in C}\delta(a,f)=2\ 与\ \delta(\infty,f)=0,$$

Drasin 猜测

$$\sum_{b\in C}\delta(b,f')=\delta(0,f')=1,$$

本文 1991 年 2 月 1 日收到.
* 国家自然科学基金资助项目.

这里 $\sum_{a\in C}\delta(a,f)$ 表示 $f(z)$ 的总亏量，$\sum_{b\in C}\delta(b,f')$ 表示 $f'(z)$ 的总亏量，均包含值∞在内.

(B) 若 $f(z)$ 于开平面亚纯，且 $\delta(\infty,f)=0$. 是否可能有

$$\sum_{a\in C}\delta(a,f)+\sum_{b\in C}\delta(b,f')=4? \tag{2}$$

(C) 如果等式(2)不可能成立，那么(2)式左端的最佳上界是什么?

二、Drasin 问题的解答与有关结果

定理 1 设 $f(z)$ 为开平面上的有穷级亚纯函数，k 为一正整数，则

$$\sum_{a\in C}\delta(a,f)-\sum_{b\in C}\delta(b,f^{(k)})\leqslant 3.$$

式中的等号当且仅当下述两种情况时成立:

(i) $\Theta(\infty,f)=1,\sum_{a\in C}\delta(a,f)=1$ 与 $\sum_{b\in C}\delta(b,f^{(k)})=2$;

(ii) $k=1$, $\Theta(\infty,f)=0,\sum_{a\in C}\delta(a,f)=2$ 与 $\sum_{b\in C}\delta(b,f')=1$.

定理 1 中使等号成立的两种情况都是可以发生的.情况 (i) 的例子是函数 e^z;情况 (ii) 的例子有函数 $\frac{e^z}{e^z+1}$.

定理 1 结合熟知的不等式(1)便给予了 Drasin 的猜测 (A) 肯定的回答. 当 $f(z)$ 是有穷级时，它也给予问题 (B) 以否定的回答，同时回答了问题 (C)，最佳上界等于 3.

如果在问题 (B) 中不假定 $\delta(\infty,f)=0$，则等式(2)是可能成立的. 事实上，我们有

定理 2 设 $f(z)$ 为开平面上的有穷级亚纯函数，k_0 为一正整数. 为了使

$$\sum_{a\in C}\delta(a,f)+\sum_{b\in C}\delta(b,f^{(k_0)})=4,$$

必要且充分的条件是

$$\delta(\infty,f)=1,\qquad \sum_{a\in C}\delta(a,f)=1$$

与

$$\delta(0,f^{(k)})=\delta(\infty,f^{(k)})=1\ (k=1,2,\cdots).$$

我们还可以将 Drasin 的猜测 (A) 提得更普遍些，并且给予肯定的回答.

定理 3 设 $f(z)$ 为开平面上的有穷级亚纯函数. 若 $\sum_{a\in C}\delta(a,f)=2$，则

$$\sum_{b\in C}\delta(b,f^{(k)})=\delta(0,f^{(k)})=\frac{2}{k+1}\ (k=1,2,\cdots).$$

类似于定理 1，我们可以考虑亚纯函数的总亏量与其导数总亏量的其他类型的估计. 例如

定理 4 设 $f(z)$ 为开平面上的有穷级亚纯函数，k 为一正整数，则

$$\left(\sum_{a\in C}\delta(a,f)\right)\left(\sum_{b\in C}\delta(b,f^{(k)})\right)\leqslant 2.$$

三、Mues 猜 测

1971 年，Mues[4] 提出了以下猜测：

设 $f(z)$ 于开平面超越亚纯，k 为一正整数，则

$$\sum_{a\in C}\delta(a,f^{(k)})\leqslant 1. \tag{3}$$

如果 $f(z)$ 适合条件 $N(r,f)=o\{T(r,f)\}$，易知 Mues 猜测成立．较一般地，若 $f(z)$ 适合

$$N(r,f)-k\bar{N}(r,f)=o\{T(r,f)\},$$

则应用 Frank 与 Weissenborn[5] 的一个引理，也不难证明 Mues 猜测成立．我们还可以考虑其他很不相同的特殊情况，

定理 5 设 $f(z)$ 为开平面上的有穷级亚纯函数，k 为一正整数．若

$$\Theta(\infty,f)\leqslant\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)+\left(1+\frac{1}{k}\right)\delta(\infty,f^{(k)})}{1+\delta(\infty,f^{(k)})},$$

则 Mues 猜测(即不等式(3))成立．特别地，若 $\Theta(\infty,f)\leqslant 1-\frac{1}{k}$，则 Mues 猜测成立．

定理 6 设 $f(z)$ 为开平面上的有穷级亚纯函数，k 为一正整数．若

$$(1+\delta(\infty,f^{(k)}))\left(\sum_{a\in C}\delta(a,f)\right)\geqslant 2,$$

则 Mues 猜测成立．特别地，若

$$\sum_{a\in C}\delta(a,f)+\delta(\infty,f^{(k)})\geqslant 2,$$

则 Mues 猜测成立．

对于一般情况，Mues 猜测还未获得证实．Mues[4] 自己曾得到估计式

$$\sum_{a\in C}\delta(a,f^{(k)})\leqslant\frac{k^2+5k+4}{k^2+4k+2}.$$

作者[6]则将上述估计改进为

$$\sum_{a\in C}\delta(a,f^{(k)})\leqslant\frac{2k+2}{2k+1}.$$

参 考 文 献

[1] Hayman, W. K., *Meromorphic Functions*, Oxford, 1975.

[2] 杨乐，值分布论及其新研究，科学出版社，1982.

[3] Drasin, D., An introduction to potential theory and *meromorphic junctions*, *Complex Analysis and Its Applications*, vol. 1, IAEA, Vienna, 1976, 1—93.

[4] Mues, E., *Manuscripta Math.*, 5(1971), 275—297.

[5] Frank, G. and Weissenborn, G., *Bull. London Math. Soc.*, 18(1986), 29—33.

[6] 杨乐，科学通报，35(1990)，16：1208—1210.