科学通报 2008 年 第 53 卷 第 15 期: 1759 ~ 1762
论 文
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

作用于海流上的线性表面张力-重力短峰波

黄虎

上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072
E-mail: hhuang@shu.edu.cn

2008-04-15 收稿, 2008-06-13 接受
全国优秀博士学位论文作者专项资金(批准号: 200428)、上海市教委科研创新项目(批准号: 08YZ05)、上海交通大学海洋工程国家重点实验室开放基金(批准号: 0501)和上海市重点学科建设项目(批准号: Y0103)资助

摘要 短峰波为一基本的三维海洋表面波, 代表着当今水波发展的一大前沿态势; 表面张力波可产生种种显著效应, 与海面雷达遥感直接相关; 海流贯穿表面波的整个运行过程. 根据上述理念构造出表面张力-重力短峰波的一般线性动力系统, 并纳入海流效应, 得到下列运动学、动力学变量的解析表达式: 自由表面位移、速度势、角频率、波高、波陡、相速度、水质点速度、加速度和轨迹、波压力. 该套解析解可包含若干种经典、代表性和最新的波况特例.

关键词
短峰波
表面张力
线性解
波-流相互作用

从水波覆盖地球表面 70.8%[1]的事实来看, 无论怎么强调对海洋表面波研究的重要性都不为过. 从发现孤立波算起[2], 对表面水波(一般指基本的、典型周期为 1~25 s的风浪和涌浪, 而不属于地球物理流体动力学研究领域的多种大尺度海洋波动[3,4])研究不足 170 年, 远远没有穷尽对其的认识和描述. 这大约 170 年的探索, 以理想的二维长峰波为基调[2,5,6], 又通常集中于表面重力波, 而忽略了表面张力波. 事实上, 从海洋工程发展和掌握异常、复杂波动(如巨波(giant waves)[7])机制的现实要求来看, 从理想二维长峰波到实际三维短峰波[8](short-crested waves)乃当下研究的大势所趋. 后者具有极大的理论探索空间[9,10], 广泛存在于近海、海岸工程环境里[11]. 例如, 两列行波的倾斜相互作用和对垂直海堤斜入射而形成的反射波状况, 以KP方程[12]刻画的一般三维浅水波. 一对波浪运行恢复力——表面张力和重力, 彼此不可分割, 共同形成表面张力-重力波系统, 而表面张力可产生种种显著的效应[13,14], 非重力所能代替和解释. 例如, 在广阔海面上实施的雷达遥感, 就是直接测量表面张力波. 显然, 这种信息的提取是三维的. 最近, 在表面张力-重力波的框架下, 诸国桢等人[15]通过精细实验描述了由水滴产生的一种环形波包的传播过程.

实在说来, 纯粹的波动并不存在, 必伴随无处不在的海流运动, 这类似于"无风不起浪"之说. 于是, 波-流相互作用就构成海洋表面波运行的普遍机制[16~19]. 由于非线性水波方程难于求解, 迫使人们寻求其近似解或线性解析解, 后者在学科发展的进程中必然扮演着先导、基础性的角色. 公正地说, 自 20 世纪初以来近 75 年的时间里, 线性方程在 20 世纪物理学的发展中占据着主导地位[20], 关联着一维、二维、三维线性波动方程的解, 涉及到行波、驻波、Doppler效应, 以及量子力学中的Schrödinger波.

最近, Henry[21]针对线性二维表面张力-重力波系统, 给出一组解析解, 并以此探讨水质点轨道的数学性质. 本文受此触发, 欲在线性三维表面张力-重力波的框架下, 纳入海流的影响, 以此求一解析解, 可将诸多线性表面波解(包含Henry解)统归其中.

1 表面张力-重力短峰波系统构造

在常水深海底, 假定无黏、不可压缩流体做无旋运动. 如图 1 所示, 同一原点两套空间直角坐标系 $O(x_1,x_2,z)$ 和 $O(x,y,z)$, 平面 $z=0$ 位于平均水平面(MWL)、而非静水面(SWL)上[16], x轴与 x_1 轴夹角为 α. 当波数为 k、与 y 轴成 β 角的一列波倾斜入射x轴(相当于一垂直防浪墙), 再以 β 角反射时可汇合成

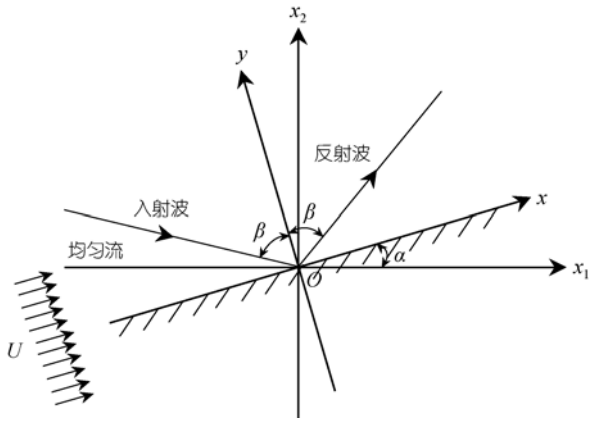


图 1 波-流相互作用的短峰波

短峰波, 并伴随着沿 x 轴的沿岸均匀流动 U.

设自由表面高度为 $\zeta(x,y,t)$, 总速度势为 $\Phi(x,y,z,t)$, 且可表示为

$$\Phi(x,y,z,t)=Ux+\phi(x,y,z,t), \tag{1}$$

其中 ϕ 刻画波运动. 该短峰波系统的线性控制方程组如下:

$$\nabla^2\phi=0,\quad -h\leqslant z\leqslant 0, \tag{2}$$

$$g\zeta+\frac{\partial\phi}{\partial t}+U\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)=0,\quad z=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+U\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0,\quad z=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0,\quad z=-h, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=0,\quad y=0, \tag{6}$$

其中 T 为表面张力系数, g 和 ρ 分别为重力加速度和流体密度, $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

假定短峰波为一沿着 x 和 y 方向的双周期波动, 可回归为两种极端情形的二维波: 沿 x 方向的 Stokes 行波和沿 y 方向的驻波. 因此可令

$$X=kx\sin\beta-\omega t=m_1x_1+m_2x_2-\omega t, \tag{7}$$

$$Y=ky\cos\beta=n_1x_1+n_2x_2, \tag{8}$$

$$Z=z. \tag{9}$$

其中 ω 为入射波、反射波的角频率. 同时, 可将入射波、反射波的波长 L 分解为沿 x, y 向的波长, 分别表示沿 x, y 向波峰间的距离:

$$L_x=\frac{2\pi}{k\sin\beta},\quad L_y=\frac{2\pi}{k\cos\beta}. \tag{10}$$

分别沿着 x,y 轴的两波数矢量 $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ 可表示为

$$\boldsymbol{m}=(m_1,m_2)=(k\cos\alpha\sin\beta,k\sin\alpha\sin\beta), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{n}=(n_1,n_2)=(-k\sin\alpha\cos\beta,k\cos\alpha\cos\beta), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad \boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2=k^2. \tag{13}$$

现在可将(2)~(6)式以 (X,Y,Z) 表示为

$$k^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}\sin^2\beta+\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}\cos^2\beta\right)+\frac{\partial^2\phi}{\partial Z^2}=0,\quad -h\leqslant Z\leqslant 0, \tag{14}$$

$$g\zeta-\omega\frac{\partial\phi}{\partial X}+kU\frac{\partial\phi}{\partial X}\sin\beta-\frac{T}{\rho}k^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial X^2}\sin^2\beta+\frac{\partial^2\zeta}{\partial Y^2}\cos^2\beta\right)=0,\quad Z=0, \tag{15}$$

$$-\omega\frac{\partial\zeta}{\partial X}+kU\frac{\partial\zeta}{\partial X}\sin\beta-\frac{\partial\phi}{\partial Z}=0,\quad Z=0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Z}=0,\quad Z=-h, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Y}=0,\quad Y=0. \tag{18}$$

2 解析解和“运动学、动力学”变量

求解短峰波系统(14)~(18)式, 可得其自由表面、速度势和角频率:

$$\zeta(X,Y,t)=A\cos Y\cos X, \tag{19}$$

$$\phi(X,Y,Z,t)=\frac{A\omega_{\mathrm{r}}}{k}\frac{\cosh k(Z+h)}{\sinh kh}\cos Y\sin X, \tag{20}$$

$$\omega_{\mathrm{r}}=\omega-kU\sin\beta,\quad \omega_{\mathrm{r}}^2=gk(1+\kappa)\tanh kh. \tag{21}$$

(21)式中的两方程分别为 Doppler 频移关系和色散关系, ω 和 ω_{r} 则分别代表绝对角频率和相对角频率, $\kappa=\dfrac{Tk^2}{\rho g}$ 为无量纲 Bond 数的倒数, 表示张力与重力的比值. 在 $\kappa=0$ 和 $\kappa\neq 0$ 条件下, 即可考察纯表面张力短峰波和纯表面重力短峰波的演变特性.

依据解析解(19)~(21)式, 可得下列“运动学和动力学”物理变量.

2.1 波高和波陡

短峰波沿着岸壁且在 $x=0$ 处, 当 $t=r\pi$ (r 为一偶整数)和 $t=r\pi$ (r 为一奇整数)时, 将分别达到波峰高度 $\zeta_{\max}$ 和降至波谷深处 $\zeta_{\min}$, 即

$$\zeta_{\max}=A,\quad \zeta_{\min}=-A. \tag{22}$$

据此获得短峰波的波高 H_{sc} 和波陡:

$$H_{\mathrm{sc}}=\zeta_{\max}-\zeta_{\min}=2A,\quad \frac{\zeta_{\max}}{H_{\mathrm{sc}}}=\frac{1}{2},\quad \frac{H_{\mathrm{sc}}}{\lambda_x}=\frac{2A}{L}\sin\beta. \tag{23}$$

2.2 周期和相速度

$$T_{\mathrm{a}}=\frac{2\pi}{\omega}=T_{\mathrm{r}}\left(1-\frac{U}{c_{\mathrm{r}}}\sin\beta\right),\quad c_{\mathrm{a}}=\frac{\omega}{k\sin\beta}=c_{\mathrm{r}}+U,$$

$$T_{\mathrm{r}}=\frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{r}}},\quad c_{\mathrm{r}}=\frac{\omega_{\mathrm{r}}}{k\sin\beta},\tag{24}$$

其中 T_{a} 和 T_{r} 分别表示绝对周期和相对周期，c_{a} 和 c_{r} 分别表示沿 x 向传播的绝对相速度和相对相速度.

2.3 水质点速度、加速度和轨道

$$u(X,Y,Z,t)=U+A\omega_{\mathrm{r}}\frac{\cosh k(Z+h)}{\sinh kh}\cos Y\cos X\sin\beta,\tag{25}$$

$$v(X,Y,Z,t)=-A\omega_{\mathrm{r}}\frac{\cosh k(Z+h)}{\sinh kh}\sin Y\sin X\cos\beta,\tag{26}$$

$$w(X,Y,Z,t)=A\omega_{\mathrm{r}}\frac{\sinh k(Z+h)}{\sinh kh}\cos Y\sin X,\tag{27}$$

$$a_x(X,Y,Z,t)=A\omega_{\mathrm{r}}\omega\frac{\cosh k(Z+h)}{\sinh kh}\cos Y\sin X\sin\beta,\tag{28}$$

$$a_y(X,Y,Z,t)=A\omega_{\mathrm{r}}\omega\frac{\cosh k(Z+h)}{\sinh kh}\sin Y\cos X\cos\beta,\tag{29}$$

$$a_z(X,Y,Z,t)=-A\omega_{\mathrm{r}}\omega\frac{\sinh k(Z+h)}{\sinh kh}\cos Y\cos X,\tag{30}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u,\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v,\quad\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=w.\tag{31}$$

2.4 压力

$$p(X,Y,Z,t)=-\rho g\left[Z-\zeta(1+\kappa)\frac{\cosh k(Z+h)}{\cosh kh}\right].\tag{32}$$

3 特例

由解析解(19)~(21)式，即可得下列多种波况条件下的特例.

3.1 三维纯表面重力短峰波

当不考虑表面张力和均匀流效应时，即 $T=U=0$，则(19)~(21)式回归为Hsu等人[8]提出的典型纯表面重力短峰波一阶解.

3.2 二维表面张力-重力波

令β=90°，则(19)~(21)式简化为二维表面张力-重力行波解；若再忽略均匀流效应，则又得到Henry[21]最近给出的一组行波解. 经典的Stokes波线性解[5]可包含其中. 令β=0°，则(19)~(21)式简化为二维表面张力-重力驻波解；若同样再忽略均匀流效应，则又得到经典的二维表面张力-重力波一阶驻波解[22]；若又再忽略表面张力效应，则最终得到经典的二维纯表面重力波一阶驻波解[23].

3.3 三维深水表面张力-重力短峰波

令 $kh>>1$，则(19)~(21)式简化为两大水域之一解——深水表面张力-重力短峰波解:

$$\zeta=A\cos Y\cos X,\quad\phi=A\sqrt{\frac{g}{k}(1+\kappa)}e^{kZ}\cos Y\sin X,$$

$$\omega_r^{\,2}=gk(1+\kappa).\tag{33}$$

$$u=U+A\sqrt{gk\left(1+\kappa\right)}\,e^{kZ}\cos Y\cos X\sin\beta,$$

$$v=-A\sqrt{gk\left(1+\kappa\right)}\,e^{kZ}\sin Y\sin X\cos\beta,\tag{34}$$

$$w=A\sqrt{gk\left(1+\kappa\right)}e^{kZ}\cos Y\sin X,$$

$$p=-\rho g[Z-\zeta(1+\kappa)\mathrm{e}^{kZ}].\tag{35}$$

3.4 三维浅水表面张力-重力短峰波

令 $kh<<1$，则(19)~(21)式简化为两大水域之另一解——浅水表面张力-重力短峰波解:

$$\zeta=A\cos Y\cos X,$$

$$\phi=\frac{A}{kh}\sqrt{gh(1+\kappa)}\left\{1+\frac{1}{2}[k(z+h)]^2\right\}\cos Y\sin X,$$

$$\omega_{\mathrm{r}}^2=k^2gh(1+\kappa),\tag{36}$$

$$u=U+\frac{A}{h}\sqrt{gh(1+\kappa)}\cos Y\cos X\sin\beta,$$

$$v=-\frac{A}{h}\sqrt{gh(1+\kappa)}\sin Y\sin X\cos\beta,$$

$$w=\frac{A}{h}k(Z+h)\sqrt{gh(1+\kappa)}\cos Y\sin X,\tag{37}$$

$$p=-\rho g[Z-\zeta(1+\kappa)].\tag{38}$$

显然，上述三维深水、浅水表面张力-重力短峰波解，可继续化简为经典的二维深水、浅水表面张力-重力波，包括行波和驻波.

4 结论

从理想二维长峰波到实际三维短峰波，代表着当今广阔海洋表面波发展的一个前沿态势. 作为三维水波动力学的基础框架，短峰波理论的线性解析解构成其第一要素. 在近海、海岸波-流相互作用的普遍机制下，本文提出表面张力-重力短峰波场的一般线性理论，并得到其解析解，以此扩展、完善了目前的线性水波理论体系，为探索非线性短峰波理论打下重要的基础.

参考文献

1 Trujillo A P, Thurman H V. Essentials of Oceanography. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2005
2 Craik A D D. The origins of water wave theory. Annu Rev Fluid Mech, 2004, 36: 1—28[doi]
3 Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. 2nd ed. Berlin: Springer, 1987
4 王斌, 季仲贞. 多守恒差分格式的构造及其数值试验. 科学通报, 2003, 48(7): 743—746
5 Mei C C, Stiassnie M, Yue D K-P. Theory and Applications of Ocean Surface Waves. Part 1, Linear Aspects; 2, Nonlinear Aspects. Singapore: World Scientific, 2005
6 吕镭, 陈伟中, 朱逸斐, 等. 水波孤子与缺陷相互作用的实验观测. 科学通报, 2004, 49(11): 1036—1039
7 Kharif C, Pelinousky E. Freak wave phenomenon: Physical mechanisms and modeling. In: Grue J, Trulson K, eds. Waves in Geophysical Fluids. Berlin: Springer, 2006. 107—172
8 Hsu J R C, Tsuchiya Y, Silvester R. Third-order approximation to short-crested waves. J Fluid Mech, 1979, 90: 179—196[doi]
9 Fuhrman D R, Madsen P A. Short-crested waves in deep water: A numerical investigation of recent laboratory experiments. J Fluid Mech, 2006, 559: 391—411[doi]
10 Huang H, Fu J. The patterns of surface capillary-gravity short-crested waves with uniform current fields in coastal waters. Acta Mech Sin, 2006, 22(5): 433—441 [doi]
11 Hsu J R C. Short-crested waves. In: Herbich J B, ed. Handbook of Coastal and Ocean Engineering. Houston: Gulf Publishing Company, 1990. 95—174
12 Akylas T. Three-dimensional long water-wave phenomena. Ann Rev Fluid Mech, 1994, 26: 191—210[doi]
13 Dias F, Christian K. Nonlinear gravity and capillary-gravity waves. Annu Rev Fluid Mech, 1999, 31: 301—346[doi]
14 Perlin M, Schultz W W. Capillary effects on surface waves. Annu Rev Fluid Mech, 2000, 32: 241—274 [doi]
15 诸国桢, 李朝辉, 傅德永. 水滴产生的环形波包实验. 科学通报, 2008, 53(5): 503—507
16 Peregrine D H. Interaction of water waves and currents. Adv Appl Mech, 1976, 16: 9—117
17 Thomas G P, Klopman G. Wave-current interactions in the near shore region. In: Hunt J N, ed. Gravity Waves in Water of Finite Depth. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1997. 255—319
18 黄虎. 波-流相互作用的缓坡方程及其波作用量守恒. 力学学报, 2005, 37(5): 627—631
19 Smith J A. Wave-current interactions in finite depth. J Phys Oceanogr, 2006, 36: 1403—1419 [doi]
20 Newton R G. What Makes Nature Tick? Cambridge: Harvard University Press, 1993
21 Henry D. Particle trajectories in linear periodic capillary and capillary-gravity water waves. Phil Trans R Soc A, 2007, 365: 2241—2251[doi]
22 Concus P. Standing capillary-gravity waves of finite amplitude. J Fluid Mech, 1962, 14: 568—576[doi]
23 Tadjbakhsh I, Keller J B. Standing surface waves of finite amplitude. J Fluid Mech, 1960, 8: 442—451[doi]

·书 讯·

《仿人机器人》

著者: 肖南峰
出版: 科学出版社 **2008** 年 **3** 月
定价: **50** 元



该书依照仿人机器人双眼、双手、双脚、大脑的顺序, 首先详细介绍了仿人机器人立体视觉的基本原理、视觉模型、控制系统和控制方法. 然后, 对于仿人机器人五指形灵巧手的各个指关节及其驱动机构、分布于各个手指和手掌上的触觉传感器、手-腕-臂控制方法和作业描述语言进行了深入的阐述. 最后, 对如何驱动仿人形机器人二足步行机构、仿人形机器人虚拟示教方法和人机交互关键技术进行了全面的分析. 此外, 在相关章节还给出了一个具有视觉和触觉的仿人形机器人(包括立体视觉装置、五指形灵巧手和二足步行机构等)完成若干作业的实例.

该书可作为在机械制造、化工生产、核电维修、军事战斗、医疗手术等行业从事仿人机器人科学研究和应用开发的科学工作者、工程技术人员和高等院校师生的参考书.