科 学 通 报
第 39 卷 第 10 期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1994 年 5 月

一个赤道具有高温的黑洞*

肖兴国 杨树正 赵 峥
(天津教育学院物理系，天津 300020) (四川师范学院物理系，南充 637002) (北京师范大学物理系，北京 100875)

关键词 黑洞、奇点、Hawking 温度

文献[1] 给出了一个具有任意多极矩变形质量的外部引力场的 Einstein 真空场方程静态渐近平直解. 已证明 $x=1$ 的超曲面是它的事件视界，而内禀奇点出现在赤道 $(x=1,\ y=0)$ 上. 这是一个非常特殊而又有趣的天体模型. 下面我们将讨论它的热力学性质，计算此黑洞的视界表面重力和视界温度.

由文献[1] 可知，一般静态轴对称线元可表示为

$$ds^2=m^2e^{-2\psi}[e^{2\gamma}(x^2-y^2)(\frac{dx^2}{x^2-1}+\frac{dy^2}{1-y^2})+(x^2-1)(1-y^2)d\varphi^2]-e^{2\psi}dt^2, \tag{1}$$

式中 m 为实常数，而 $x,\ y$ 为扁椭球坐标，

$$x=(r-M)/m,\quad y=\cos\theta,$$

式中 M 是黑洞总质量.

式(1)中 ψ 和 γ 是两个度规函数，它们分别为

$$\psi=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{(x^2+y^2-1)^{(n+1)/2}}P_n[\frac{xy}{(x^2+y^2-1)^{1/2}}],$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2-y^2}+\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\alpha_k\alpha_n(k+1)(n+1)}{(k+n+2)(x^2+y^2-1)^{(k+n+2)/2}}$$
$$\cdot(P_{k+1}P_{n+1}-P_kP_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\alpha_n[\frac{x-y+(-1)^{n-1}(x+y)}{(x^2+y^2-1)^{(l+1)/2}}P_l-1+(-1)^{n+1}], \tag{2}$$

式中 P_n 为 Legendre 多项式，其宗量为 $\frac{xy}{(x^2+y^2-1)^{1/2}}$；$\alpha_n$ 为实常数. 由

$$g_{00}=-e^{2\psi},\quad g^{11}=\frac{1}{g_{11}}=m^{-2}e^{2\psi}e^{-2\gamma}(x^2-y^2)^{-1}(x^2-1),$$

得

$$\sqrt{\frac{-g^{11}}{g_{00}}}=m^{-1}e^{-\gamma_0}. \tag{3}$$

1993-09-20 收稿，1994-01-22 收修改稿.
*国家自然科学基金资助项目.

$$\frac{\partial}{\partial x} g_{00}=-\frac{\partial}{\partial x} e^{2\psi}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-1}{x+1} e^{2\psi_0}\right)=-\frac{2}{(x+1)^2} e^{2\psi_0}-\frac{x-1}{x+1}\frac{\partial}{\partial x} e^{2\psi_0}, \tag{4}$$

式中

$$\psi_0=\psi-\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1},$$

$$\gamma_0=\gamma-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2-y^2}. \tag{5}$$

由式(3)、(4)可得黑洞视界表面重力,考虑 $P_n(1)=1$, 则[2]

$$\begin{aligned}
k&=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{-g^{11}}{g_{00}}}\,\hat{g}'_{00}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{-g^{11}}{g_{00}}}\,g'_{00}\\
&=\frac{1}{2}m^{-1}\lim_{x\to 1} e^{-\gamma_0}\left[\frac{2}{(x+1)^2} e^{2\psi_0}+\frac{x-1}{x+1}\frac{\partial}{\partial x} e^{2\psi_0}\right]\\
&=\frac{1}{4m}\lim_{x\to 1} e^{2\psi_0-\gamma_0}\\
&=\frac{1}{4m}\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha_n}{y^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\alpha_n\left[\frac{(1-y)+(-1)^{n-l}(1+y)}{y^{l+1}}-1+(-1)^{n+1}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{4m}\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha_n}{y^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left[\frac{2}{y^{n+1}}-1+(-1)^n-1+(-1)^{n+1}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{4m}\exp\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha_n.
\end{aligned} \tag{6}$$

其 Hawking 辐射温度[2] 为

$$T=k/2\pi K_B=\frac{1}{8\pi m K_B} e^{\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha_n}, \tag{7}$$

式中 K_B 为玻耳兹曼常数.

由式(7)可知,视界温度是一个只与多极矩参数 α_n 有关的物理量,对应于不同的多极矩,它具有不同的值; 但对应于某个质量多极矩,视界温度是个确定的常数. 显然,当多极矩消失,即 $\alpha_n=0$ 时,

$$T=\frac{1}{8\pi m K_B}.$$

此黑洞的视界温度与球对称静态 Schwarzschild 黑洞的情况完全一致. 下面研究内禀奇点 $y=0$ 处的视界温度. 先令 $y\to 0$, 再令 $x\to 1$, 则

$$\begin{aligned}
k(y=0)&=\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{g^{11}}{g_{00}}}\,g'_{00}\\
&=\frac{1}{2m}\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0} e^{-\gamma_0}\left[\frac{2}{(x+1)^2} e^{2\psi_0}+\frac{x-1}{x+1}\frac{\partial}{\partial x} e^{2\psi_0}\right].
\end{aligned}$$

根据 Lgeendre 多项式的定义

$$P_n(x)=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{n!}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\cdots\right],$$

有

$$\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n\left[\frac{xy}{(x^2+y^2-1)^{1/2}}\right]=0,$$

故

$$k(y=0)=\frac{1}{2m}\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x+1)^2}\lim_{y\to 0}\mathrm{e}^{-\gamma_0+2\psi_0}=\frac{1}{2m}\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x+1)^2}$$
$$\cdot\exp\left\{\sum_{k,n=1}\frac{\alpha_k\alpha_n(k+1)(n+1)}{(k+n+2)(x^2-1)^{(k+n+2)/2}}\left[P_k(0)P_n(0)-P_{k+1}(0)P_{n+1}(0)\right]\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha_n}{(x^2-1)^{(n+1)/2}}P_n(0)-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\alpha_n\left[\frac{x+(-1)^{n-l}}{(x^2-1)^{(l+1)/2}}P_l(0)-1+(-1)^{n+1}\right]\right\}.$$

事实上，多极矩的阶数是按 2^n 排列的，对于一个孤立的质量多极矩黑洞，最低阶数的质量多极矩是四极矩（$\alpha_n=\alpha_2$）．又考虑到关系式

$$P_{2n+1}(0)=0,\quad P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n-1)!}{2n!},$$

故视界 $y=0$ 处的表面重力为

$$k(y=0)=\frac{1}{4m}\lim_{x\to 1}\exp\left\{\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\alpha_k\alpha_n(k+1)(n+1)}{(k+n+2)(x^2-1)^{(k+n+2)/2}}\right.$$
$$\cdot\left[P_k(0)P_n(0)-P_{k+1}(0)P_{n+1}(0)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{(x^2-1)^{(n+1)/2}}$$
$$\left.\cdot\left[2P_n(0)-\sum_{l=0}^{n}(x+(-1)^{n-l}x)(x^2-1)^{(n-l)/2}P_l(0)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left[1+(-1)^n\right]\right\}=\infty,\tag{8}$$

所以 $y=0$ 处的视界温度为

$$T(y=0)=\frac{k}{2\pi K_B}=\infty.\tag{9}$$

使我们感到惊讶的是，此黑洞内禀奇点处视界温度达到了无穷大．

赤道处温度无穷大而视界其它地方的温度为常数的黑洞是非常有意义的．因为符合 Einstein 场方程解的、赤道处具有高温的黑洞在天体演化中可能是一种重要的理想天体模型，所以这类黑洞值得我们进一步研究和探讨．

参　考　文　献

[1] Manko, V. S., *Class. Quantum Grav.*, 1990, 7: 209.
[2] 赵峥、桂元星，天体物理学报，1983, 3: 146.