

基于离散Wigner函数的量子信道魔态资源量化

傅双双¹, 李晓会^{2*}

1. 北京科技大学数理学院, 北京 100083

2. 河南省科学院数学研究所, 郑州 450046

* 联系人, E-mail: lixiaohui@hnas.ac.cn

2025-09-19 收稿, 2025-12-22 修回, 2025-12-25 接受, 2025-12-26 网络版发表

河南省科学院高层次人才科研启动项目(241819031)、河南省自然科学基金(252300423505)和中央高校基本科研业务费(FRF-TP-19-012A3)资助

摘要 作为量子计算中不可或缺的资源, 魔态资源(magic resources)在容错量子计算中发挥着至关重要的作用, 因此关于魔态资源的量化与应用研究引起人们广泛的关注. 在本文中, 通过研究量子信道的Choi矩阵以及其离散的Wigner函数, 我们提出了一种量子信道魔态资源的量化指标. 该度量可直接计算, 不仅如此, 它还具有若干优良性质, 因此可以合理刻画量子信道的魔态资源. 通过对特殊量子信道进行计算, 我们建立了该度量与现有的一些量化指标之间的联系. 具体而言, 对于素数维量子系统中的退相位信道(dephasing channels), 该魔态资源度量与已有的两种量子信道产生魔态资源的能力度量之间存在解析关联. 此外, 我们还将该度量与两个近期提出的信道魔态资源度量进行了对比分析, 结果揭示这些量化指标之间存在着密切的联系和微妙的差异.

关键词 量子计算, 魔态资源, 量子信道, 离散Wigner函数, Choi矩阵

稳定子体系(stabilizer formalism)是研究量子纠错与容错通用量子计算的重要理论框架^[1~10]. 根据著名的Gottesman-Knill定理, 由Hadamard门、S门、CNOT门、泡利门、泡利测量及经典随机性构成的稳定电路, 可由经典计算机高效模拟^[1,11]. 要实现通用量子计算, 必须引入额外的非稳定量子资源(亦称魔态资源, magic resources), 比如魔态或能产生魔态资源的量子信道^[12~17]. 在基于稳定子体系与魔态资源的计算框架中, 高质量的魔态资源是实现量子优势的核心. 因此, 魔态的蒸馏也被广泛研究^[16~23].

为了有效控制和利用魔态资源, 我们需要精确量化并表征量子态与量子信道的魔态资源. 目前已有多种针对量子态魔态资源的度量, 比如相对熵^[24]、Wigner函数的负部之和(sum negativity)^[24]、对数负性(mana)^[24]、稳定秩(stabilizer rank)^[25,26]、魔态资源的

鲁棒性^[21,24,27]、thau^[23]等. 在这些量化指标中, 负部之和与对数负性均基于量子态的离散Wigner函数. 该函数作为量子系统中共轭正则观测量的一种基本相空间表示^[28], 满足归一化条件, 但与经典概率分布不同, 离散Wigner函数能够在相空间某些区域内呈现负值, 这种被称为“Wigner负性”的独特性质, 已被确认为量子系统中非经典性的表征, 可作为重要量子资源广泛应用于量子信息处理^[29~38]. 特别地, 离散Wigner函数中的负部之和已被作为量子态魔态资源的度量^[24].

为实现通用量子计算, 除了考虑魔态外, 还可以考虑在稳定子体系中注入non-Clifford门, 因此量子信道魔态资源的量化和研究也是十分重要的. 资源理论的最新进展已将魔态资源的量化方法推广至量子信道. 比如, 王鑫等人在文献^[39]中引入了量子信道的thau和mana度量. 对于多量子比特系统, Seddon和Campbell

引用格式: 傅双双, 李晓会. 基于离散Wigner函数的量子信道魔态资源量化. 科学通报, 2026, 71: 5134–5141

Fu S, Li X. Quantifying the magic resources of quantum channels via the discrete Wigner functions (in Chinese). Chin Sci Bull, 2026, 71: 5134–5141, doi: 10.1360/CSB-2025-5567

在文献[40]中引入了两种魔态资源的单调性度量: 信道鲁棒性(channel robustness)与魔态资源容量(magic resources capacity). 文献[41]将量子态魔态资源量化的广义鲁棒性与最小相对熵扩展至量子信道. 我们在文献[42]中, 基于信道对应的Choi态的特征函数, 提出了一种量子信道魔态资源的量化指标. 不同的量子信道魔态资源的量化指标从不同的角度出发, 揭示了量子信道在产生魔态资源上的不同特性, 对于丰富和深化人们对魔态资源的认识是必要的.

本文基于量子信道的Choi矩阵及其离散的Wigner函数, 提出了一种量子信道魔态资源的度量, 该度量除了可以直接计算外, 还具有很多优良的性质. 此外, 它与现有的多种魔态资源量化指标存在密切的联系. 通过对素数维量子系统上的退相位量子信道进行计算, 我们发现本文所提出的度量与文献[7]中提出的两种信道产生魔态资源量化指标之间存在解析关联. 通过与mana以及基于特征函数的量子信道魔态资源量化指标进行对比分析, 我们进一步揭示了这些量化指标之间的紧密联系与细微差异.

本文首先对稳定子体系、量子态与量子信道的离散Wigner函数进行简要综述. 其次基于离散Wigner函数, 引入量子信道的魔态资源量化指标, 并揭示了该度量的若干优良特性. 然后针对素数维量子系统中的退相位量子信道, 证明了该度量与魔态资源生成能力量化指标之间的解析关系. 最后通过对比研究, 揭示了该度量与两种已有的量子信道魔态资源度量之间的联系与差异. 文中命题的详细数学证明请见补充材料.

1 预备知识

本节将简要回顾量子计算中的稳定子体系, 以及量子态与量子信道的离散Wigner函数的相关定义.

1.1 稳定子体系

对于一个具有标准计算基 $\{|j\rangle : j \in \mathbb{Z}_d\}$ 的 d 维量子系统 $\mathbb{C}^d$ (此处 $\mathbb{Z}_d = \{0, 1, \dots, d-1\}$ 是模 d 的整数环, 充当离散构型空间(discrete configuration space)), 下述酉算子 $X = \sum_{k=0}^{d-1} |k+1\rangle\langle k|, Z = \sum_{k=0}^{d-1} \omega^k |k\rangle\langle k|, \omega = e^{2\pi i/d}$ 是离散Heisenberg-Weyl (HW)算子 $D_{\mathbf{u}} = D_{k,l} = \tau^{kl} X^k Z^l$, $\mathbf{u} = (k, l) \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d, \tau = -e^{\pi i/d}$ 的基本组成部分. 这些HW算子满

足如下乘法关系:

$$D_{\mathbf{u}} D_{\mathbf{v}} = \tau^{-\mathbf{u} \times \mathbf{v}} D_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}, \quad (1)$$

其中, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = kt - ls$ 是 $\mathbf{u} = (k, l)$ 和 $\mathbf{v} = (t, s)$ 的外积. 特别地, $\text{Tr}(D_{\mathbf{u}} D_{\mathbf{v}}^\dagger) = d\delta_{k,s}\delta_{l,t}$. 因此, $\{\frac{1}{\sqrt{d}} D_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} = (k, l) \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d\}$ 在Hilbert-Schmidt内积 $\langle A | B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$ 下构成了量子系统 $\mathbb{C}^d$ 上的线性算子空间 $L(\mathbb{C}^d)$ 的一组标准正交基.

Pauli群(离散HW群) $\mathcal{P}_d = \{\tau^j D_{\mathbf{u}} : j \in \mathbb{Z}_{2d}, \mathbf{u} = (k, l) \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d\}$ 和其正规化群(Cliﬀord群) $\mathcal{C}_d = \{V \in \mathcal{U}_d : V \mathcal{P}_d V^\dagger = \mathcal{P}_d\}$ 是作用在 $\mathbb{C}^d$ 上的酉群 $\mathcal{U}_d$ 的两个重要子群, 它们在稳定子体系中发挥着至关重要的作用. 在 $\mathbb{C}^d$ 中, 如果 $|\phi\rangle$ 是 $\mathcal{P}_d$ 中某个极大交换子群 $\mathcal{A}(c\mathbf{1} \notin \mathcal{A}, c \neq 1)$ 中所有算子的特征值为1的公共特征态, 则 $|\phi\rangle$ 被称为纯稳定态. 我们将量子系统 $\mathbb{C}^d$ 中纯稳定态的集合记为 $\mathcal{S}_d$.

1.2 量子态和量子信道的离散Wigner函数

离散Wigner函数存在多种构建方式[17,24,43-50], 本文采用文献[17,24]中的定义, 该版本的Wigner函数需要所涉及的量子系统维数为奇数维. 因此在后续讨论中, 如无特别说明, 我们假设所涉量子系统的维数为奇数维. 对于复合系统, 则假定其各子系统的维数均为奇数维.

对于量子系统 $\mathbb{C}^d$ 中的任意量子态 ρ , 其离散Wigner函数定义为[17,24]

$$W_\rho(\mathbf{u}) = \frac{1}{d} \text{Tr}(\rho A_{\mathbf{u}}), \mathbf{u} \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d \quad (2)$$

其中, 相空间点算子为 $A_0 = \frac{1}{d} \sum_{\mathbf{u}} D_{\mathbf{u}}, A_{\mathbf{u}} = D_{\mathbf{u}} A_0 D_{\mathbf{u}}^\dagger$.

上述Wigner函数的定义可推广至系统 $\mathbb{C}^d$ 上的任意厄米算子 X , 具体如下: $W_X(\mathbf{u}) = \frac{1}{d} \text{Tr}(A_{\mathbf{u}} X)$.

集合 $\{A_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d\}$ 具有若干良好性质, 列述如下: (1) $A_{\mathbf{u}}$ 是厄米算子; (2) $\sum_{\mathbf{u}} A_{\mathbf{u}} / d = \mathbf{1}$; (3) $\text{Tr}(A_{\mathbf{u}} A_{\mathbf{u}'}) = d\delta(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$; (4) $\text{Tr}(A_{\mathbf{u}}) = 1$; (5) $\rho = \sum_{\mathbf{u}} W_\rho(\mathbf{u}) A_{\mathbf{u}}$; (6) $\{A_{\mathbf{u}}\} = \{A_{\mathbf{u}}^T\}$.

由上述性质可知, $W_\rho(\mathbf{u})$ 满足归一化条件 $\sum_{\mathbf{u}} W_\rho$

$(\mathbf{u}) = 1$, 然而对于某些量子态 ρ , 其Wigner函数可能取负值, 故被称为准概率分布. 我们将具有非负Wigner函数的量子态集合记为 $\mathcal{W}_+$, 即 $\mathcal{W}_+ := \{\rho : \forall \mathbf{u}, W_\rho(\mathbf{u}) \geq 0, \rho \geq 0, \text{Tr}(\rho) = 1\}$.

根据文献[48]所述, 集合 $\mathcal{W}_+$ 中的量子态可通过经典方法模拟, 且在魔态蒸馏中不具备应用价值. 一个保持厄米性的线性映射 $\Pi: L(\mathcal{H}^a) \rightarrow L(\mathcal{H}^b)$ 被称为完全正的保Wigner正操作(completely positive-Wigner-preserving operations, CPWP), 当且仅当对于任意量子系统 $\mathcal{H}^c$, 满足以下条件[41]: $\forall \rho_{ac} \in \mathcal{W}_+, (\Pi \otimes \mathbf{1}_c)(\rho_{ac}) \in \mathcal{W}_+$. 为量化量子态 ρ 的离散Wigner函数中的负性程度, 文献[24]引入了负部之和(sum negativity), 定义为

$$\begin{aligned} N(\rho) &:= \sum_{\mathbf{u}: W_\rho(\mathbf{u}) < 0} |W_\rho(\mathbf{u})| \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\mathbf{u}} |W_\rho(\mathbf{u})| - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} (\|\rho\|_{W,1} - 1), \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\|\mathbf{X}\|_{W,1} := \sum_{\mathbf{u}} |W_X(\mathbf{u})| = \frac{1}{d} \sum_{\mathbf{u}} |\text{Tr}(A_{\mathbf{u}} X)|$ 是文献[50]中定义的Wigner迹范数.

基于负部之和, 量子态 ρ 的对数负性(mana)定义为[24]

$$\mathcal{M}(\rho) := \log \left(\sum_{\mathbf{u}} |W_\rho(\mathbf{u})| \right) = \log(2N(\rho) + 1) = \log \|\rho\|_{W,1}.$$

本文 $\log$ 均表示以2为底的对数函数. 负部之和 $N(\rho)$ 和对数负性 $\mathcal{M}(\rho)$ 都是量子态的魔态资源度量.

对于一般量子信道 $\mathcal{E}: L(\mathcal{H}^a) \rightarrow L(\mathcal{H}^b)$, 其对应的Choi矩阵为 $J_{\mathcal{E}} = \sum_{i,j} |i\rangle\langle j|_a \otimes \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|_{a'})$, 其中, $\{|i\rangle_a\}$ 和 $\{|i\rangle_{a'}\}$ 分别是同构Hilbert空间 $\mathcal{H}^a$ 和 $\mathcal{H}^{a'}$ 的标准正交基. 基于量子信道的Choi矩阵, 量子信道的离散Wigner函数被定义为[39]

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathcal{E}}(\mathbf{v} | \mathbf{u}) &:= \frac{1}{d_b} \text{Tr} \left[\left((A_{\mathbf{u}}^a)^T \otimes A_{\mathbf{v}}^b \right) J_{\mathcal{E}} \right] \\ &= \frac{1}{d_b} \text{Tr} \left[A_{\mathbf{v}}^b \mathcal{E}(A_{\mathbf{u}}^a) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

基于相空间点算子的性质, 上述Wigner函数显然满足如下归一化条件 $\sum_{\mathbf{v}} \mathcal{W}_{\mathcal{E}}(\mathbf{v} | \mathbf{u}) = 1, \forall \mathbf{u}$. 但是同量子态的Wigner函数一样, 量子信道的Wigner函数也可能

取负值, 因此是准概率分布. 对于上面提到的CPWP操作, 以下命题已被证明等价[39]: (1) 量子信道 $\mathcal{E}$ 是CPWP; (2) Choi矩阵 $J_{\mathcal{E}}$ 的离散Wigner函数 $\mathcal{W}_{J_{\mathcal{E}}}(\mathbf{u})$ 是非负的; (3) 对于所有的 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$, $\mathcal{W}_{\mathcal{E}}(\mathbf{v} | \mathbf{u})$ 是非负的.

2 量子信道的魔态资源度量

对于一般的量子信道 $\mathcal{E}: L(\mathcal{H}^a) \rightarrow L(\mathcal{H}^b)$, 基于式(4)给出的量子信道的离散Wigner函数, 我们引入以下度量:

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) := \log \frac{1}{d_a^2} \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} |\mathcal{W}_{\mathcal{E}}(\mathbf{v} | \mathbf{u})|, \quad (5)$$

作为信道 $\mathcal{E}$ 魔态资源的度量. 等价地, 该式可表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{E}) &= \log \frac{1}{d_a^2} \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} \frac{1}{d_b} \left| \text{Tr} \left[\left((A_{\mathbf{u}}^a)^T \otimes A_{\mathbf{v}}^b \right) J_{\mathcal{E}} \right] \right| \\ &= \log \frac{1}{d_a^2} \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} \frac{1}{d_b} \left| \text{Tr} \left(A_{\mathbf{v}}^b \mathcal{E}(A_{\mathbf{u}}^a) \right) \right| \\ &= \log \frac{1}{d_a^2} \sum_{\mathbf{u}} \left\| \mathcal{E}(A_{\mathbf{u}}^a) \right\|_{W,1}. \end{aligned} \quad (6)$$

对于给定的量子信道 $\mathcal{E}$, 上述魔态资源度量 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 可以直接计算得到. 除此之外, 它还具有多个理想性质, 如下列命题所示.

命题1. 量子信道的魔态资源度量 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 具有以下良好性质: (1) $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \geq 0$, 且 $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{E} \in \text{CPWP}$. (2) 对于量子信道 $\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) = \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) + \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$. (3) 对于替换信道 $\mathcal{E}(\rho) = \sigma$, 有 $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\sigma)$. (4) $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 在Clifford变换复合下保持不变, 即 $\mathcal{M}(\mathcal{E}_V \circ \mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E} \circ \mathcal{E}_V) = \mathcal{M}(\mathcal{E})$. 此处, $\mathcal{E}_V(\rho) = V \rho V^\dagger$, 其中 $V \in \mathcal{C}_d$.

上述性质的具体证明参见补充材料附录A. 命题1表明 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 确实可以刻画量子信道的魔态资源.

此外, 在资源理论中, 量子态和量子操作的资源之间某种程度上可以互相转化. 回顾文献[39], 从系统 a 到系统 b 的量子信道 $\mathcal{E}_{a \rightarrow b}$ 被称为可注入信道(injectable channel), 若存在CPWP信道 $\mathcal{A}_{ac \rightarrow b}$ 和资源态 ω_c , 使得对所有输入态 ρ_a , 下面等式均成立:

$$\mathcal{E}_{a \rightarrow b}(\rho_a) = \mathcal{A}_{ac \rightarrow b}(\rho_a \otimes \omega_c). \quad (7)$$

对于可注入信道, 下列结论成立.

命题2. 设 $\mathcal{E}_{a \rightarrow b}$ 为由等式(7)给出的可注入信道, 则该信道的魔态资源度量 $\mathcal{M}(\mathcal{E}_{a \rightarrow b})$ 受限于资源态 ω_c 的对数负性, 即 $\mathcal{M}(\mathcal{E}_{a \rightarrow b}) \leq \mathcal{M}(\omega_c)$.

命题2的详细证明请见补充材料附录B.

3 退相位信道的魔态资源

对于一个具有标准计算基 $\{|j\rangle : j \in \mathbb{Z}_d\}$ 的 d 维量子系统 $\mathbb{C}^d$, 一个信道 $\mathcal{E}$ 被称为退相位信道, 如果其满足^[51] $\langle i|\mathcal{E}(\rho)|i\rangle = \langle i|\rho|i\rangle, \forall i = 0, 1, \dots, d-1$.

为了量化量子信道 $\mathcal{E}$ 产生魔态资源的能力, 文献[7]中基于式(3)定义的求和负性, 提出了以下两个信道 $\mathcal{E}$ 产生魔态资源能力的量化指标:

$$M(\mathcal{E}) = \max_{|\phi\rangle \in \mathcal{S}_d} N(\mathcal{E}(|\phi\rangle)), \quad (8)$$

$$A(\mathcal{E}) = \frac{1}{|\mathcal{S}_d|} \sum_{|\phi\rangle \in \mathcal{S}_d} N(\mathcal{E}(|\phi\rangle)), \quad (9)$$

其中, $|\mathcal{S}_d|$ 表示纯稳定态集合所含元素个数. 需要注意的是, 第一个量 $M(\mathcal{E})$ 是对所有纯稳定态的求和负性取最大值, 而第二个量 $A(\mathcal{E})$ 则是对所有纯稳定态的求和负性取平均.

下面我们证明对于奇素数维量子系统中的退相位量子信道 $\mathcal{E}$, 其魔态资源度量 $M(\mathcal{E})$ 与产生魔态资源能力的量化指标 $M(\mathcal{E})$ 以及 $A(\mathcal{E})$ 之间存在解析关系. 相关结果总结于下述命题中.

$$\begin{aligned} M(\mathcal{E}_{H_3}) &= \log \left[\frac{3}{2} |1 - 2\sqrt{2} \cos \theta| + \frac{3}{2} |1 - 2\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})| + \frac{3}{2} |1 - 2\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{4\pi}{3})| \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2} |1 + 2\sqrt{2} \cos \theta| + \frac{9}{2} |1 + 2\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})| + \frac{9}{2} |1 + 2\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{4\pi}{3})| + 27 \right]. \\ M(\mathcal{E}_{H_3}) &= \frac{1}{36} |1 - 2\sqrt{6} \sin \theta| + \frac{1}{36} |1 + 2\sqrt{6} \sin(\theta + \frac{\pi}{3})| + \frac{1}{36} |1 - 2\sqrt{6} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3})| \\ &\quad + \frac{1}{36} |3 - 2\sqrt{2} \cos \theta| + \frac{1}{36} |3 - 2\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})| + \frac{1}{36} |3 - 2\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{4\pi}{3})| - \frac{5}{18}. \\ A(\mathcal{E}_{H_3}) &= -\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{36} (|\cos \theta| + |\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})| + |\cos(\theta + \frac{4\pi}{3})|) \\ &\quad + \frac{1}{144} (|1 - 2\sqrt{6} \sin \theta| + |1 + 2\sqrt{6} \sin(\theta + \frac{\pi}{3})| + |1 - 2\sqrt{6} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3})|) \\ &\quad + \frac{1}{144} (|1 + 2\sqrt{6} \sin \theta| + |1 - 2\sqrt{6} \sin(\theta + \frac{\pi}{3})| + |1 + 2\sqrt{6} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3})|) \\ &\quad + \frac{1}{72} (|3 - 2\sqrt{2} \cos \theta| + |3 - 2\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})| + |3 - 2\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{4\pi}{3})|). \end{aligned}$$

因此, 对一般量子信道而言, 上述量化指标之间并不存在明确的定量关系.

4 比较讨论

在本节, 我们将本文所建立的量子信道魔态资源度量 $M(\mathcal{E})$ 与两种文献中已有的信道魔态资源度量进

命题3. 对于任意奇素数维量子系统 $\mathbb{C}^d$ 上的退相位量子信道 $\mathcal{E}$, 下列关系式成立:

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \log[2M(\mathcal{E}) + 1], \mathcal{M}(\mathcal{E}) = \log \left[\frac{2(d+1)}{d} A(\mathcal{E}) + 1 \right].$$

证明详见补充材料附录C.

由于任意对角酉信道 $\mathcal{E}_{U_d}(\rho) = U_d \rho U_d^\dagger$ (即在计算基下呈对角形式的酉信道)是退相位通道的特殊形式, 下列结论相应成立.

推论1. 对于任意奇素数维量子系统 $\mathbb{C}^d$ 上的对角酉信道 $\mathcal{E}_{U_d}(\rho) = U_d \rho U_d^\dagger$, 下列关系式成立:

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}_{U_d}) = \log[2M(\mathcal{E}_{U_d}) + 1],$$

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}_{U_d}) = \log \left[\frac{2(d+1)}{d} A(\mathcal{E}_{U_d}) + 1 \right].$$

注意上述结论对于一般酉算子并不成立, 如考虑一个三维量子系统(qutrit system)上的酉信道 $\mathcal{E}_{H_3} = H_3 \rho H_3^\dagger$, 其中 H_3 为酉算子

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} e^{i\theta} \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}.$$

经直接计算可得:

行对比分析, 揭示不同度量之间的关系和差异.

首先, 王鑫等人在文献[39]中也基于量子信道的离散Wigner函数, 提出了一种信道的魔态资源度量, 该度量被称为量子信道的“mana”, 定义如下:

$$\text{mana}(\mathcal{E}) = \log \max_u \sum_v |\mathcal{W}_{\mathcal{E}}(v|u)|. \quad (10)$$

对比式(5)与式(10)给出的两种度量, 其存在诸多相

似之处. 如: 这两种方法均基于量子信道的Choi矩阵以及关于 $\mathbf{u}$ 的拟概率分布 $\mathcal{W}_{\mathcal{E}}(\mathbf{v} | \mathbf{u})$, 且都采用Wigner负性作为表征魔态资源的工具. 然而, 二者存在一些细微差异. 从数学形式来看, 王鑫等人在其度量中采用了对 $\mathbf{u}$ 取极大值的操作 $\max_{\mathbf{u}} \sum_{\mathbf{v}} |\mathcal{W}_{\mathcal{E}}(\mathbf{v} | \mathbf{u})|$, 而我们则采用对 $\mathbf{u}$ 求和的方式, 即 $\sum_{\mathbf{u}} \sum_{\mathbf{v}} |\mathcal{W}_{\mathcal{E}}(\mathbf{v} | \mathbf{u})|$. 虽然从范数的角度而言, 二者具有等价性, 具体表现为

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}} \sum_{\mathbf{v}} |\mathcal{W}_{\mathcal{E}}(\mathbf{v} | \mathbf{u})| &\leq \sum_{\mathbf{u}} \sum_{\mathbf{v}} |\mathcal{W}_{\mathcal{E}}(\mathbf{v} | \mathbf{u})| \\ &\leq d^2 \max_{\mathbf{u}} \sum_{\mathbf{v}} |\mathcal{W}_{\mathcal{E}}(\mathbf{v} | \mathbf{u})|. \end{aligned}$$

然而, 它们仍是两种不同的范数, 会导致相应的两种度量性质上存在差异. 如在第3节中, 我们已经证明对于素数维量子系统中的退相位通道 $\mathcal{E}$, 其魔态资源度量 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 与产生魔态资源能力的量化指标之间 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 以及 $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ 存在解析关系. 然而, 若采用式(10)中的度量, 该结论就不再成立.

其次, 对于量子信道 $\mathcal{E}: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$, 在基于特征函数的魔态资源量化方法^[52]的基础上, 文献[42]采用量子信道的Choi矩阵, 引入了如下量化指标

$$\mathcal{N}(\mathcal{E}) = \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} \frac{1}{d} |\text{Tr}((D_{\mathbf{u}} \otimes D_{\mathbf{v}}) \mathcal{J}_{\mathcal{E}})|. \quad (11)$$

用以表征量子信道 $\mathcal{E}$ 的魔态资源. 与本文所引入的度量不同, 上述基于特征函数的度量对于任意维数的量子系统上的量子信道都适用. 下面我们证明对于奇数维量子系统上的量子信道, $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ 能为 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 提供上下界.

命题4. 对于奇数维量子系统上的量子信道 $\mathcal{E}: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$, 下列关系成立: $\log \mathcal{N}(\mathcal{E}) - 4 \log d \leq \mathcal{M}(\mathcal{E}) \leq \log \mathcal{N}(\mathcal{E})$. 证明详见补充材料附录D.

5 总结

在量子计算的稳定子体系中, Wigner负性可作为实现通用量子计算的一种量子资源. 利用量子信道的Choi矩阵及其离散的Wigner函数, 我们提出了一种可直接计算的量子信道魔态资源度量, 并证明了该度量具有良好的数学性质.

对于素数维量子系统中的退相位信道, 我们揭示了其魔态资源度量与产生魔态资源能力的量化指标之间存在解析关系. 对于一般的量子信道, 我们通过将本文提出的度量与两种已有的量子信道魔态资源度量进行对比, 发现它们之间存在密切的联系, 但是又存在着一定的差异, 因此不同的度量从不同的角度反映了量子信道的魔态特性. 本文的研究结果进一步丰富了量子信道的魔态资源刻画. 后续可基于本度量, 考虑其在量子计算中的具体应用.

参考文献

- Gottesman D. Stabilizer Codes and Quantum Error Correction. Doctor Dissertation. Pasadena, CA: California Institute of Technology, 1997
- Zeng B, Chen X, Chuang I L. Semi-Clifford operations, structure of $\mathcal{C}_k$ hierarchy, and gate complexity for fault-tolerant quantum computation. *Phys Rev A*, 2008, 77: 042313
- Howard M, Vala J. Qudit versions of the qubit $\pi/8$ gate. *Phys Rev A*, 2012, 86: 022316
- Bravyi S, Smith G, Smolin J A. Trading classical and quantum computational resources. *Phys Rev X*, 2016, 6: 021043
- Cui S X, Gottesman D, Krishna A. Diagonal gates in the Clifford hierarchy. *Phys Rev A*, 2017, 95: 012329
- Yoganathan M, Jozsa R, Strelchuk S. Quantum advantage of unitary Clifford circuits with magic state inputs. *Proc R Soc A*, 2019, 475: 20180427
- Li X, Luo S. Optimal diagonal qutrit gates for creating Wigner negativity. *Phys Lett A*, 2023, 460: 128620
- Feng L, Luo S. Groups of diagonal gates in the Clifford hierarchy. *Theor Math Phys*, 2024, 221: 2007–2021
- Bu K, Gu W, Jaffe A. Quantum entropy and central limit theorem. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2023, 120: e2304589120
- Bu K, Garcia R J, Jaffe A, et al. Complexity of quantum circuits via sensitivity, magic, and coherence. *Commun Math Phys*, 2024, 405: 161
- Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge: Cambridge University Press, 2010
- Gottesman D. The Heisenberg representation of quantum computers. 1998, arXiv: [quant-ph/9807006](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9807006)
- Gottesman D, Chuang I L. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations. *Nature*, 1999, 402: 390–393

- 14 Zhou X, Leung D W, Chuang I L. Methodology for quantum logic gate construction. [Phys Rev A](#), 2000, 62: 052316
- 15 Aaronson S, Gottesman D. Improved simulation of stabilizer circuits. [Phys Rev A](#), 2004, 70: 052328
- 16 Bravyi S, Kitaev A. Universal quantum computation with ideal Clifford gates and noisy ancillas. [Phys Rev A](#), 2005, 71: 022316
- 17 Gross D. Hudson's theorem for finite-dimensional quantum systems. [J Math Phys](#), 2006, 47: 122107
- 18 Anwar H, Campbell E T, Browne D E. Qutrit magic state distillation. [New J Phys](#), 2012, 14: 063006
- 19 Campbell E T, Anwar H, Browne D E. Magic-state distillation in all prime dimensions using quantum Reed-Muller codes. [Phys Rev X](#), 2012, 2: 041021
- 20 Campbell E T, Howard M. Unifying gate synthesis and magic state distillation. [Phys Rev Lett](#), 2017, 118: 060501
- 21 Howard M, Campbell E. Application of a resource theory for magic states to fault-tolerant quantum computing. [Phys Rev Lett](#), 2017, 118: 090501
- 22 Ahmadi M, Dang H B, Gour G, et al. Quantification and manipulation of magic states. [Phys Rev A](#), 2018, 97: 062332
- 23 Wang X, Wilde M M, Su Y. Efficiently computable bounds for magic state distillation. [Phys Rev Lett](#), 2020, 124: 090505
- 24 Veitch V, Hamed Mousavian S A, Gottesman D, et al. The resource theory of stabilizer quantum computation. [New J Phys](#), 2014, 16: 013009
- 25 Bravyi S, Gosset D. Improved classical simulation of quantum circuits dominated by Clifford gates. [Phys Rev Lett](#), 2016, 116: 250501
- 26 Bravyi S, Browne D, Calpin P, et al. Simulation of quantum circuits by low-rank stabilizer decompositions. [Quantum](#), 2019, 3: 181
- 27 Heinrich M, Gross D. Robustness of magic and symmetries of the stabiliser polytope. [Quantum](#), 2019, 3: 132
- 28 Wigner E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. [Phys Rev](#), 1932, 40: 749–759
- 29 Dahl J P, Mack H, Wolf A, et al. Entanglement versus negative domains of Wigner functions. [Phys Rev A](#), 2006, 74: 042323
- 30 Casaccino A, Galvão E F, Severini S. Extrema of discrete Wigner functions and applications. [Phys Rev A](#), 2008, 78: 022310
- 31 Spekkens R W. Negativity and contextuality are equivalent notions of nonclassicality. [Phys Rev Lett](#), 2008, 101: 020401
- 32 Giraudo O, Braun P, Braun D. Classicality of spin states. [Phys Rev A](#), 2008, 78: 042112
- 33 DeBroya J B, Fuchs C A. Negativity bounds for Weyl–Heisenberg quasiprobability representations. [Found Phys](#), 2017, 47: 1009–1030
- 34 Walschaers M, Fabre C, Parigi V, et al. Entanglement and Wigner function negativity of multimode Non-Gaussian states. [Phys Rev Lett](#), 2017, 119: 183601
- 35 Delfosse N, Okay C, Bermejo-Vega J, et al. Equivalence between contextuality and negativity of the Wigner function for qudits. [New J Phys](#), 2017, 19: 123024
- 36 Raussendorf R, Browne D E, Delfosse N, et al. Contextuality and Wigner-function negativity in qubit quantum computation. [Phys Rev A](#), 2017, 95: 052334
- 37 Albarelli F, Genoni M G, Paris M G A, et al. Resource theory of quantum non-Gaussianity and Wigner negativity. [Phys Rev A](#), 2018, 98: 052350
- 38 Lin Y L, Dahlsten O C O. Necessity of negative Wigner function for tunneling. [Phys Rev A](#), 2020, 102: 062210
- 39 Wang X, Wilde M M, Su Y. Quantifying the magic of quantum channels. [New J Phys](#), 2019, 21: 103002
- 40 Seddon J R, Campbell E T. Quantifying magic for multi-qubit operations. [Proc R Soc A](#), 2019, 475: 20190251
- 41 Saxena G, Gour G. Quantifying multiqubit magic channels with completely stabilizer-preserving operations. [Phys Rev A](#), 2022, 106: 042422
- 42 Li X, Luo S, Zhang Z. Quantifying magic resource for quantum channels via channel-state duality. [Phys Rev A](#), 2025, 111: 052420
- 43 Wootters W K. A Wigner-function formulation of finite-state quantum mechanics. [Ann Phys](#), 1987, 176: 1–21
- 44 Gibbons K S, Hoffman M J, Wootters W K. Discrete phase space based on finite fields. [Phys Rev A](#), 2004, 70: 062101
- 45 Galvão E F. Discrete Wigner functions and quantum computational speedup. [Phys Rev A](#), 2005, 71: 042302
- 46 Cormick C, Galvão E F, Gottesman D, et al. Classicality in discrete Wigner functions. [Phys Rev A](#), 2006, 73: 012301
- 47 Ferrie C, Emerson J. Framed Hilbert space: Hanging the quasi-probability pictures of quantum theory. [New J Phys](#), 2009, 11: 063040
- 48 Veitch V, Ferrie C, Gross D, et al. Negative quasi-probability as a resource for quantum computation. [New J Phys](#), 2012, 14: 113011
- 49 Veitch V. Negative Quasi-Probability in the Context of Quantum Computation. Doctor Dissertation. Waterloo: University of Waterloo, 2013
- 50 Zhu H. Quasiprobability representations of quantum mechanics with minimal negativity. [Phys Rev Lett](#), 2016, 117: 120404
- 51 Puchała Z, Korzekwa K, Salazar R, et al. Dephasing superchannels. [Phys Rev A](#), 2021, 104: 052611
- 52 Dai H, Fu S, Luo S. Detecting magic states via characteristic functions. [Int J Theor Phys](#), 2022, 61: 35

补充材料

附录A 命题1的证明

附录B 命题2的证明

附录C 命题3的证明

附录D 命题4的证明

本文以上补充材料见网络版csb.scichina.com. 补充材料为作者提供的原始数据, 作者对其学术质量和内容负责.

Summary for “基于离散Wigner函数的量子信道魔态资源量化”

Quantifying the magic resources of quantum channels via the discrete Wigner functions

Shuangshuang Fu¹ & Xiaohui Li^{2*}

¹ School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

² Institute of Mathematics, Henan Academy of Sciences, Zhengzhou 450046, China

* Corresponding author, E-mail: lixiaohui@hnas.ac.cn

The celebrated Gottesman-Knill theorem shows that stabilizer circuits can be efficiently simulated by classical computers, while universal fault-tolerant quantum computation can be achieved via injection of magic resources into the stabilizer circuits. Investigations about the quantifications and applications of the magic resource for both quantum states and quantum channels have attracted lots of attention. There have been several measures of magic for quantum states from different aspects, including the relative entropy of magic resource, sum negativity, mana, stabilizer rank, robustness of magic resource, thauma, etc. Since non-Clifford gates can be injected as a kind of resource in the stabilizer formalism, it is necessary to quantify the magic resource of the quantum channel. Recent developments in resource theory have generalized the magic resource quantification to quantum channels. In this work, for quantum channels on odd-dimensional quantum systems, we propose a new quantifier of magic for quantum channels employing the Choi matrix of the corresponding quantum channel and the discrete Wigner function. The quantifier can be straightforwardly calculated. Besides, it possesses some nice properties, including the faithfulness, additivity under tensor products, reduction to the states, and the Clifford invariance; it is indeed a reasonable measure of magic for quantum channels. We review the injectable quantum channel and find that for the injectable channel with a given resource state, the magic quantifier of this channel is upper-bounded by the mana of the resource state. For the specific dephasing channel in prime-dimensional quantum systems, we evaluate the magic quantifier explicitly and reveal its analytical relations with the maximal and average quantifiers of generating-power of magic resource based on the sum negativity for quantum states. For a general unitary channel, we show that these measures are quite different and reflect different perspectives of magic resources for quantum channels. We also make comparative studies between our quantifier and two existing quantifiers of magic for quantum channels. The first one is the “mana” for quantum channels. We demonstrate that although mathematically the two quantifiers are equivalent, they are different norms revealing different features of the quantum channel. The two quantifiers can lead to different orderings as regards the magnitude of the magic resource in the quantum channels. For the dephasing channels, the new quantifier is simply related to the corresponding maximal and average magic-resource-generating power. However, the conclusion fails to hold when employing the measure “mana”. The second quantifier we compare is the one based on the characteristic function of the Choi state. We show that they are closely related in the sense that they can serve as bounds for each other. Our findings demonstrate that these quantifiers are closely related, yet there are subtle distinctions between them. The present work enriches the characterizations of the magic resource for quantum channels.

quantum computation, magic resources, quantum channel, discrete Wigner function, Choi matrix

doi: [10.1360/CSB-2025-5567](https://doi.org/10.1360/CSB-2025-5567)