科 学 通 报
第 39 卷 第 12 期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1994 年 6 月

研究简报

连续模的控制及量化定理*

陈天平 朱文革
(复旦大学数学研究所，上海 200433)

关键词 连续模、量化定理、距离空间

本文主要讨论紧度量空间 (X, d) 上线性算子的量化逼近定理. 这方面的研究工作起始于 Mamedov 等在 50 年代末的一系列文章[1]之后，1964 年 Newman 和 Shapiro 对 Menger 引进的距离凸空间，80 年代 Pozo 对他引入的具凹形变系数的紧度量空间分别建立了类似的量化定理[2]. 以上工作中起关键作用的是连续模的下述性质: $\omega(f, \lambda\omega) \leqslant (1+\lambda\delta)\omega(f, \varepsilon)$ (这里 δ 指凹形变系数，对距离凸空间有 $\delta=1$) 而对一般的紧度量空间，连续模不满足这个性质. 为此，本文将引入连续模的一种新的控制函数 $\hat{\omega}(f, \varepsilon)$，并由此建立了一般紧度量空间上的量化逼近定理. 这种控制函数满足 $\omega(f, \varepsilon) \leqslant \hat{\omega}(f, \varepsilon)$ 及 $\hat{\omega}(f, \lambda\varepsilon) \leqslant (1+\delta\lambda)\hat{\omega}(f, \varepsilon)$，并且在下述意义下是最佳的，即对于单调函数 $g(f, \varepsilon)$，如果满足 $\omega(f, \varepsilon) \leqslant g(f, \varepsilon)$ 及 $g(f, \lambda\varepsilon) \leqslant (1+\lambda\delta)g(f, \varepsilon)$，则有 $\hat{\omega}(f, \varepsilon) \leqslant g(f, \varepsilon)$.

首先我们具体构造这种控制函数.

定义 1 连续模 $\omega(f, \varepsilon)$ 的 n-控制定义为

$\hat{\omega}_n(f, \varepsilon) := \max(\omega_n(f, \varepsilon), \omega(f, \varepsilon))$，这里 $\omega_n(f, 0) := \omega(f, 0)$.

$\omega_n\left(f, \frac{d(X)}{2^n}\right) := K_1 \frac{d(X)}{2^n}$，其中 $d(X)$ 表示 X 直径，$K_1 = \inf\{K: K\varepsilon \geqslant \omega(f, \varepsilon)$，当 $\varepsilon \geqslant \frac{d(X)}{2^n}$ 时$\}$ $\omega_n(f, \varepsilon) := \left(\omega_n\left(f, \frac{d(X)}{2^n}\right) \omega_n(f, 0)\right) z^n \frac{\varepsilon}{d(X)}$，当 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{d(X)}{2^n}$ 时，一般地，在给定 $\omega_n\left(f, \frac{kd(X)}{2^n}\right)$ 后，定义

$$\omega_n\left(f, \frac{(k+1)d(X)}{2^n}\right) := \max\left\{K_k \frac{(k+1)d(X)}{2^n}, \omega_n\left(f, \frac{kd(X)}{2^n}\right)\right\},$$

其中 $K_k := \inf\left\{K: K\varepsilon + \omega_n\left(f, \frac{kd(X)}{2^n}\right) \geqslant \omega(f, \varepsilon)$，当 $\varepsilon \leqslant \frac{(k+1)d(X)}{2^n}$ 时$\right\}$，

$$\omega_n(f, \varepsilon) := \omega_n\left(f, \frac{kd(X)}{2^n}\right) + \frac{z^n}{d(X)}\left(\omega_n\left(f, \frac{(k+1)d(X)}{2^n}\right) - \omega_n\left(f, \frac{kd(X)}{2^n}\right)\right)\left(\varepsilon - \frac{kd(X)}{2^n}\right),$$

当 $\frac{kd(X)}{2^n} \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{(k+1)d(X)}{2^n}$ 时.

下面我们不加证明地列出 $\hat{\omega}_n(f, \varepsilon)$ 的一些性质.

1993-09-27 收稿，1994-03-03 收修改稿.
*国家自然科学基金及国家教委博士点基金资助项目.

引理 1 $\hat{\omega}_n(f,\ \varepsilon)$ 为一Cauchy 序列.

定义 2 定义 $\hat{\omega}(f,\ \varepsilon):=\lim\hat{\omega}_n(f,\ \varepsilon)$ 并称之为连续模 $\omega(f,\ \varepsilon)$ 的最小 1-控制.

引理 2 $\hat{\omega}(f,\ \varepsilon)$ 满足 $\hat{\omega}(f,\ \lambda\varepsilon)\leqslant(1+\lambda)\hat{\omega}(f,\ \varepsilon)$.

引理 3 如果单调上升函数 $g(f,\varepsilon)$ 满足 $g(f,\lambda\varepsilon)\leqslant(1+\lambda)g(f,\ \varepsilon)$ 及 $\omega(f,\varepsilon)\leqslant g(f,\ \varepsilon)$ 时，则有 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)\leqslant g(f,\varepsilon)$.

引理 4 对 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)$ 及连续模的最小凹控制 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)$ 之间有下述关系：$\widetilde{\omega}(f,\ \lambda\varepsilon)\leqslant\widetilde{\omega}(f,\lambda\varepsilon)\leqslant(1+\lambda)\hat{\omega}(f,\varepsilon)$，特别地当 $\lambda=1$ 时有：$\hat{\omega}(f,\varepsilon)\leqslant\widetilde{\omega}(f,\varepsilon)\leqslant2\hat{\omega}(f,\varepsilon)$.

推论 1 当 $(X,\ d)$ 满足距离凸条件时，则 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)=\omega(f,\varepsilon)$.

利用 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)$ 及类似于 Pozo 推广的逼近度估计的直接方法，我们有下述量化定理.

定理 1 设 $(X,\ d)$ 为一紧度量空间，A 具形式 $A(f,y)=\psi_A(y)f(g_A(y))$ 这里 ψ_A 为 Y 上有界函数，g_A 映 Y 到 X. 又设 L 为 $c(X)$ 到 $B(Y)$ 的有界线性算子. 当 $y\in Y$ 时有 $L(1_X,\ y)\neq0$. 则对 $\forall f\in c(X)$ 及 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$|(L-A)(f,\ y)|\leqslant\|\phi_y\circ L\|\left(1-\frac{L(1_X,\ y)}{\|\phi_y\circ L\|}\right)(1+\varepsilon^{-1}d(X))$$

$$+\frac{|L(1_X,y)|}{L(|x,y)\|\phi_y\circ L\|}(L(1_X,\ y)+\varepsilon^{-1}L(d(\cdot,\ g_A(y)),y))\hat{\omega}(f,\varepsilon)+|(L-A)(1_X,\ y)\|f(g_A(y))|,$$

这里 1_X 表示函数 $X\ni x\mapsto1\in R$，ϕ_y 表示算子 $c(Y)\in f\mapsto f(y)\in R$.

推论 2 由定理 1 立即可以看出有：

1. $|(L-A)(f,y)|\leqslant(\|\phi_y\circ L\|-L(1_X,\ y))\left(1+\frac{d(X)}{\varepsilon}\right)+|L<(1_X,\ y)+\varepsilon^{-1}L(d(t,g_A(y)),\ y))|\hat{\omega}(f,\varepsilon)$
$+|(L-A)(1_X,\ y)||f(g_A(y))|$;

2. 如 L 为正有界线性算子，则有 $\|\phi_y\circ L\|=|L(1_X,\ y)|$，上式化为 $|(L-A)(f,y)|\leqslant L(1+\varepsilon^{-1}d(t,g_A(y))\hat{\omega}(f,\ \varepsilon)+|(L-A)(1_X,\ y)||f(g_A(y))|$;

3. 如 $(X,\ d)$ 为距离凸空间时，我们可用 $\omega(f,\ \varepsilon)$ 代替 $\hat{\omega}(f,\ \varepsilon)$ 得到 1 和 2.

注 1 相应于具凹形变系数 ρ 的紧度量空间我们也可类似地定义最小 ρ-控制 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)$ 满足 $\hat{\omega}(f,\ \lambda\varepsilon)\leqslant(1+\rho\lambda)\hat{\omega}(f,\ \varepsilon)$ 并得到类似的量化定理.

注 2 我们比较 Gonska 利用连续模的最小凹控制 $\widetilde{\omega}(f,\ \varepsilon)$ 得到的量化定理[3]:

对 $X=Y,\ A=Id,\ L(1_X,\ x)=1$ 时，由推论 2 有 $|L(f,\ x)-f(x)|\leqslant(1+\varepsilon^{-1}L(d(\cdot,\ x),\ x))\hat{\omega}(f,\varepsilon)$.

由 Gonska 的定理（文献[3] 中定理 4.2）则有 $|L(f,\ x)-f(x)|\leqslant\max(1,\varepsilon^{-1}L(d(\cdot x),\ x))\widetilde{\omega}(f,\ \varepsilon)$，故当 $\widetilde{\omega}(f,\varepsilon)=\hat{\omega}(f,\ \varepsilon)$ 时，第二个估计较精确. 当 $\widetilde{\omega}(f,\ \varepsilon)=2\hat{\omega}(f,\ \varepsilon)$ 时，第一个估计较精确.

参 考 文 献

[1] Mamedov, K., *DAN USSR*, 1959, **128**: 674—676.

[2] Pozo, M. J., *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. A, 1980, **290**: 213—215.

[3] Gonska, H., *Habilitationsschrift*, Universitat Duisburg, 1985.