科 学 通 报
第 42 卷 第 15 期 Chinese Science Bulletin 1997 年 8 月

【研究通讯】

关于 Julia 点的值分布

考虑复球面 V 上的有理函数映照 $R: V \to V$. 我们尝试用值分布的方法, 研究 Julia 点附近的性质, 从另一角度了解 Julia 点.

本文用 $|D|$ 表示区域 $D \subset V$ 的球面面积, 用 $|L|$ 表示曲线 L 在球面上的长, 用 $|a, b|$ 表示 a, b ($\in V$) 间的球面距离. $B(a, \delta) = \{z; |z, a| < \delta\}$ 表示球面上圆盘. 设区域 $U \subset V$. 用 (U, R) 表示 U 通过 R 在 V 上的覆盖曲面, 其面积记为 $|(U, R)|$. 曲面 (U, R) 在 V 上的平均覆盖次数记为 $S(U, R)$.

用 R^n 表示 R 的 n 次迭代. $J(R)$ 是 R 的 Julia 集. 设 $u \in J(R)$, 对 u 的任意邻域 U, 恒有

$$\bigcup_n R^n(U) \supset V - \{a, b\},$$

其中 a, b 是二个可能的例外点.

引理 1 例外点必是超吸引的二周期点.

证 不妨设 R 有二个例外点 a, b ($a = b$ 或 $a \neq b$). 由于例外点之集是全不变的, 即

$$R^{-1}(\{a, b\}) = R(\{a, b\}) = \{a, b\}.$$

它们有 $R^{-2}(a) = R^2(a) = a$, $R^{-2}(b) = R^2(b) = b$, 故 a, b 是二周期的. 由于 R^2 取任何点 $a \in V$ 的次数是相同的, 故在 a, b 处, 对 R^2 是 d^2 叶的, 对 R 是 d 叶的. 因此, a, b 是临界点, 是超吸引的.

定理 1 设 R 是度 $d = d(R) \geqslant 2$ 的有理函数, $u \in J(R)$ 是 Julia 点, 则对任意 u 的邻域 U, 恒有

$$1 \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S(U, R^n)}{d^n} \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S(U, R^n)}{d^n} > 0,$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\log S(U, R^n)}{n \log d} = 1.$$

证 我们知道 J 是排斥周期点的闭包[1], 故 U 中必含有排斥 t 周期 Julia 点 w 及 w 的邻域 $W \subset U$, 使 $R^t(w) = w$ 及 $W \subset R^t(W)$. 注意 w 也是 R^t 的 Julia 点[1], 故有

或者 i) $\bigcup_{j=1}^{\infty} R^{jt}(W) = V$. 由于对任意 $j \in N$, 有 $R^{(j+1)t}(W) \supset R^{jt}(W)$. 故存在 $m \in N$, 使 $R^{mt}(U) \supset R^{mt}(W) = \bigcup_{j=1}^{m} R^{jt}(W) = V$.

或者 ii) $\bigcup_{j=1}^{\infty} R^{jt}(W) = V - \{a, b\}$ ($a \neq b$, 或 $a = b$). 由引理 1 知 a, b 均是超吸引的周期点. 故存在 $\delta > 0$, 使

3 Liu Y F, Guo Z Y, Liu X Q, et al. Applications of accelerator mass spectrometry in analysis of trace isotopes and elements. Pure & Appl Chm, 1994, 66: 305~334
4 Weisman J. AMS adds realism to chemical risk assessment. Science, 1996, 271: 286~287
5 Li X S, Liu Y F, Shi J Y, et al. Genotoxicity of nicotine studied by accelerator mass spectrometry. Chinese Chem Letts, 1994, 5: 1 043~1 044
6 Li X S, Liu Y F, Shi H Y, et al. A study on DNA adduction with nicotine-derived nitrosamine by accelerator mass spectrometry. Chinese Chem Letts, 1994, 5: 873~876
7 Food and Agriculture Organization (FAO), UN. Pesticide residues in food. Plant Production and Protection Paper, 1983, 49: 383~385
8 Gupta R C. Nonrandom binding of carcinogen N-hydroxy-2-acetylamino-fluorene to repetitive sequence of rat liver DNA in vivo. Proc Natl Acad Sci USA, 1984, 81: 6 943~6 947
9 Chen C E, Guo Z Y, Yan S Q, et al. Status of the tandem accelerator mass spectrometry facility at Peking University. Nucl Instr Meth, 1990, B52: 306

(1996-10-07 收稿, 1997-04-07 收修改稿)

$$|B(a,\delta)|<\frac{1}{4},\ |B(b,\delta)|<\frac{1}{4},$$

$$R(B(a,\delta))\cup R(B(b,\delta))\subset B(a,\delta)\cup B(b,\delta). \quad (1)$$

于是存在固定的 $m\in N$,使

$$R^{mt}(U)\supset R^{mt}(W)=\bigcup_{j=1}^{m}R^{jt}(W)\supset V-B(a,\delta)-B(b,\delta).$$

结合ⅰ),ⅱ)及(1)式,并注意 $S(V,R)=d$,对任意正整数 $p\in N$,有

$$|(U,R^{mt+p})|\geqslant|(R^{mt}(U),R^{p})|\geqslant|(V-B(a,\delta)-B(b,\delta),R^{p})|\geqslant|(V,R^{p})|-|(B(a,\delta),R^{p})|-|(B(b,\delta),R^{p})|\geqslant d^{p}\pi-d^{p}(|B(a,\delta)|+|B(b,\delta)|)\geqslant\frac{d^{p}\pi}{2},\ d^{mt+p}\geqslant S(V,R^{mt+p})\geqslant S(U,R^{mt+p})\geqslant\frac{d^{p}}{2},$$

$$1\geqslant\frac{S(U,R^{mt+p})}{d^{mt+p}}\geqslant\frac{1}{2d^{mt}}>0.$$

于是可得到定理1.

定理2 R 的 Julia 点 u 必是 Borel 点,即对任意 $\delta>0$,u 的领域 $U=\{z;\ |z,\ u|<2\delta\}$ 及任意复数 $b\in V$(至多有二个例外),恒有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\bar{n}(U,R^{n}=b)}{n\log d(R)}=1,$$

其中 $\bar{n}(U,R=a)$ 表示 $R-a$ 在区域 U 中的零点个数,且不计重数.

证 由定理1的证明,可知存在 $\varepsilon>0$,对任意3个不同的复数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in V$,有

$$0<\varepsilon d^{n}(R)<S(B(u,\delta),R^{n})<\sum_{j=1}^{3}\bar{n}(B(u,2\delta),R^{n}=a_j)+C<3d^{n}+C,$$

$$0<\frac{\log\varepsilon+n\log d}{n\log d}<\frac{\log\left(\sum_{j=1}^{3}\bar{n}(B(u,2\delta),R^{n}=a_j)+C\right)}{n\log d}<\frac{n\log d+C}{n\log d}.$$

结合文献[2]定理3.1,并令 $n\to\infty$,即得定理2.

定理3 Julia 点 u 的任何邻域 U,$\{R^{n}(U)\}$ 是充满域序列,即对任意 $\sigma>0$,总存在 $m\in N$,使得当 $n>m$ 时,R^{n} 在 U 中取任意复数至少 $d^{n-m}(d=d(R))$ 次,至多除去一些复数,可含于两个球面半径为 σ 的球面圆内.

证 取 $B(u,2\delta)\subset U$,由定理1,存在 $m\in N$ 及 $\varepsilon>0$,使

$$6<\frac{2^{16}\pi^{6}}{\sigma^{6}\log 2}<\varepsilon d^{m}<S(B(u,\delta),R^{m}),\ 3d^{n-m}+\frac{2^{15}\pi^{6}}{\sigma^{6}\log 2}<d^{n-m}\frac{2^{16}\pi^{6}}{\sigma^{6}\log 2}<S(B(u,\delta),R^{n}).$$

结合文献[2]中定理3.1即得定理3.

定理4 Julia 点 u 的邻域内至少存在一条奇异方向,即存在 $\varphi\in[0,2\pi)$,使得对任意 $\varepsilon>0$ 及任意复数 $a\in V$(至多有二个例外),恒有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\bar{n}(U\cap\{z;\ |\arg(z-u)-\varphi|<\varepsilon\},R^{n}=a)}{n\log d(R)}=1,\ u\neq\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\bar{n}(U\cap\{z;\ |\arg z-\varphi|<\varepsilon\},R^{n}=a)}{n\log d(R)}=1,\ u=\infty.$$

证 在 U 内取 Julia 点的序列 $\{u_t\}\to u$.记 $\{\arg u_t\}$ 的一个聚点为 φ 则在区域 $U\cap\{z;\ |\arg(z-u)-\varphi|<\varepsilon\}$ 内必存在 Julia 点.结合定理2即得定理4.

致谢 本工作为国家自然科学基金资助项目.

参 考 文 献

1 Carleson L, Gamelin T W. Complex Dynamics. New York: Springer-Verlag, 1993

2 孙道椿,杨 乐. 拟亚纯映射的值分布. 中国科学,A辑,1997,27(3):132~139

孙道椿
(武汉大学数学系,武汉 430072)