科 学 通 报
第 38 卷 第 20 期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1993 年 10 月

Carlitz-Kummer 函数域的素分解

赵 健 强*
(南开数学研究所,天津 300071)

关键词 素分解、Carlitz-Kummer 函数域、分圆函数域

设 $\mathbf{F}_q$ 为特征 p 的 q 元有限域. $k=\mathbf{F}_q(T)$ 为有理函数域, k^{ac} 为 k 的某固定的代数闭包. 令M为 $R=\mathbf{F}_q[T]$ 中首 1 多项式, M在 $\alpha\in k^{ac}$ 上的 Carlitz 作用如下定义:

$$\alpha^M=M(F+T)\circ\alpha,$$

其中 $T\circ\alpha=T\alpha, F\circ\alpha=\alpha^q$. 此作用的 M-挠元全体 Λ_M 为一循环 R-子模. 作为分圆数域的模拟,$k_M=k(\Lambda_M)$称为分圆函数域(关于分圆函数域的理论可参看文献[1—3]).设 K/k_M 为域的有限次扩张, $z\in K-K^M$, 则作为数域 Kummer 扩张的一个模拟,在文献[4]中 Schultheis 定义 u^M-z 的分裂域 $K_{M,z}$ 为K的 Carlitz-Kummer 函数域扩张 (以下简称 CK 扩张).在文献[4]中, Schultheis 给出了 CK 扩张的一些性质, 并处理了 K-素理想 $\mathfrak{p}$ (或 $\mathfrak{q}$) 在如下情形的分解形式:

$$(S_1)\mathfrak{p}\nmid\infty=\left(\frac{1}{T}\right),\ \mathfrak{p}\nmid M \text{ 且 } v_{\mathfrak{p}}(z)\geqslant 0;$$

$$(S2)M=P, K=k_P, \mathfrak{p}\mid P \text{ 或 } v_{\mathfrak{p}}(z)<0;$$

$$(S3)M=P, K=k_P, \mathfrak{q}\mid\infty \text{ 且 } v_{\mathfrak{q}}(z)\geqslant -q.$$

以上及本文其它地方, P 总表示R中一首 1 不可约多项式.

本文将进一步研究K为 k_M 上任意有限扩张且M为R中任一多项式时 K-素理想在 CK 扩张中的分解情况. 当 $\mathfrak{p}\mid M$ 时,由 $(S1)$ 我们可以将问题化为 $M=P^l$ 且 $\mathfrak{p}\mid P$ 的情形,其中 l 为某正整数. 应用归纳法及文献[3]得到如下关键性的

引理 1 设 $n=\deg P>0, M=P^l, l$ 为正整数.当 $0\leqslant t<l, 0\leqslant i<n$ 时, 我们有

$$v_P\left(\begin{bmatrix} M \\ nt+i \end{bmatrix}\right)=l-t,\quad \begin{bmatrix} M \\ nt \end{bmatrix}\equiv P^{l-t}(\mathrm{mod}P^{l-t+1}),$$

其中 $\begin{bmatrix} M \\ j \end{bmatrix}$ 由$u^M=\sum_{t=0}^{nl}\begin{bmatrix} M \\ j \end{bmatrix}u^{q^j}$ 决定.

以下若无另外说明,我们总以O记R在 k_M 中的整闭包,其中 $M=P^l$, 并记λ为 Λ_M 的一个本原元素满足 $\mathfrak{p}\mid\mathfrak{p}_0=\lambda O$. 按习惯, 我们以 $e(/)$ 和 $f(/)$ 分别表示素理想间的分歧指数和剩余类域次数. 记 $L=K_{M,z}$, $\mathfrak{B}$ 为L中位于 $\mathfrak{p}$ 之上的一素理想, $e=e(\mathfrak{B}/\mathfrak{p})$, $f=f(\mathfrak{B}/\mathfrak{p})$, $e_0=e(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0)$ 及 $f_0=f(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0)$. 当 $v_{\mathfrak{p}}(z)=0$ 时,取 $z_1=z-z^{M/0}$,则易知 $K_{M,z_1}=K_{M,z}$,且由引理 1 有 $v_{\mathfrak{p}}(z_1)>0$, 故以下只考虑 $v_{\mathfrak{p}}(z)>0$ 的情形.

1992-10-05收稿.
* 现通讯地址: 中国科学技术大学东区 150 楼 306 室,合肥 230026.

引理 2　记号如上段，我们有

$$\lambda^{q^{nl}}+\begin{bmatrix} P^l \\ nl-n \end{bmatrix}\lambda^{q^{nl-n}}\equiv 0(\mathrm{mod}\mathfrak{p}_0^{q^{nl-n}(q^n+q-1)}).$$

运用引理 1 和引理 2 我们可以证明

定理 1　条件如引理 2，当 $0\leqslant s<l$ 时，置

$$c_s=e_0(l-s)(q^{nl}-q^{nl-n})+e_0q^{nl-n},$$

则我们有

i) 若 $0<v_\mathfrak{p}(x)<c_{l-1}$，则 $q^{nl}\mid ev_\mathfrak{p}(x)$；

ii) 若 $l>1,0<s<l,c_s<v_\mathfrak{p}(x)<c_{s-1}$，则 $ef\mid q^{ns}$ 且 $q^{ns}\mid ev_\mathfrak{p}(x)$，特别地，若 $p\nmid v_\mathfrak{p}(x)$，则 $e=q^{ns}$ 且 $f=1$。当 $f_0=1$ 时，若 $v_\mathfrak{p}(x)=c_{s-1}$ 则 $ef>1$。当 $v_\mathfrak{p}(x)=c_0$ 时，有 $e=1$，且若此时还有条件 $f_0=1$，则 $f=p$；

iii) 若 $v^\mathfrak{p}(x)>c_0$，则 $e=f=1$。

我们着手从另一角度来处理上面的问题。

令

$$c=\max\{r\leqslant c_0+1:u^M\equiv x(\mathrm{mod}\mathfrak{p}^r)\text{ 有 }O_K\text{ 中解}\}.$$

定理 2　条件如定理 1，则 $c=c_0+1$ 当且仅当 $e=f=1$。且若 $c=c_0$，则 $e=1$ 而 $f=p$。

定理 3　条件如定理 1 且 $e_0=f_0=1$。令 $b_0=q^{nl}+q^{nl-n}$。当 $0<b<b_0$ 时，我们有：$c=b$ 当且仅当 $v_\mathfrak{p}(x)=b$。若 $c=b_0$，则 $v_\mathfrak{p}(x)=b$。若 $c>b_0$，则 $v_\mathfrak{p}(x)\geqslant b_0$。

注记 1　当 $K=k_P$ 时，自然有 $e_0=f_0=1$ 且 $c_0=c_{l-1}=b_0-1$。故文献 [1, Th.3.9] 为本文定理 1—3 的特殊情形。

注记 2　分析定理 2 和 3 可启发我们提出以下问题：当 $l>1$，$e_0=f_0=1$ 且 $b_0\leqslant b\leqslant c_0$ 时，是否仍成立：$c=b$ 当且仅当 $v_\mathfrak{p}(x)=b$？

现在我们转入对无限情形的讨论。

定理 4　设 M 为 R 中任一 d 次首 1 多项式，K 为 k_M 上有限扩张。取 $x\in K-K^M$，$L=K_{M,x}$ 为 K 的 CK 扩张，记 $\infty,\mathfrak{q}_0,\mathfrak{q}$ 和 Q 分别为 k,k_M,K 和 L 中素理想，使后者位于前者之上。记 $e=e(Q/\mathfrak{q}),f=f(Q/\mathfrak{q}),e_0=e(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_0)$ 及 $f_0=f(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_0)$。当 $0\leqslant s\leqslant d$ 时，令 $c_s=-e_0q^s$，则

i) 若 $v_\mathfrak{q}(x)<c_d$，则 $q^d\mid ev_\mathfrak{q}(x)$；

ii) 若 $d>1,0<s<d,c_{s+1}<v_\mathfrak{q}(x)<c_s$，则

$ef\mid q^s$ 且 $q^s\mid ev_\mathfrak{q}(x)$，特别地，若 $p\nmid v_\mathfrak{q}(x)$，则 $e=q^s$ 且 $f=1$。若 $f_0=1$ 且 $v_\mathfrak{q}(x)=c_s$，则 $ef>1$。若 $V_\mathfrak{q}(x)=c_1$，则 $e=1$，若此时还有条件 $f_0=1$，则 $f=p$；

iii) 若 $v_\mathfrak{q}(x)>c_1$，则 $e=f=1$。

注记 3　我们看到定理 1 和 4 之间有许多相似，此原因为：在函数域中，有限和无限素理想所决定的赋值均是非阿的。特别地，定理 1 中的条件 $M=P$ 且 $v_\mathfrak{p}(x)<c_{l-1}-c_0$ 对应定理 4 中的条件 $\deg M=1$ 且 $v_\mathfrak{q}(x)<c_0-c_1$。这种对应和下面的例表明文献[1]中末段的第一句话不准确。

例　取 $M=P^l$ 如引理 1 且满足 $d=\deg M>1$。令 $K=k_M,q$ 为 K 中位于 ∞ 之上

的一素理想. 由文献 [2, Lem.1.6 和 Prop.1.10], 存在 Λ_M 的本原元素 λ, 使 $v_q(\lambda)=(d-1)(q-1)-1$. 取 $a=2(d-1)+\frac{q^{d-1}-1}{q-1}$ 及 $z=\lambda+\lambda^2T^a$. 由于 $v_q(\lambda^2T^a)=-1-q^{d-1}<(d-1)(q-1)-1$, 知 $v_q(z)=-1-q^{d-1}$. 令 $L=K_{M,z}$ 为 K 的 CK 扩张, 由于 $p\nmid v_q(z)$ 且 $-q^d<v_q(z)<-q^{d-1}$. 根据定理 4 的 ii) 得: $\mathfrak{q}$ 在 L 中的分歧指数为 q^{d-1}. 但熟知 $\mathfrak{p}=\lambda O$ 为素理想, 由引理 1 可知 u^M-z 为相对于 $\mathfrak{p}$ 的 Eisenstein 多项式, 故 $[L:K]=q^d$, 从而 $\mathfrak{q}$ 在 L 中不全分歧.

致谢 感谢冯克勤教授和张贤科副教授的许多帮助和指导.

参 考 文 献

[1] Hayes, D., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, **189**: 77—91.
[2] Galovich, S., Rosen, M., *J. Number Theory*, 1982, 14: 156—184.
[3] Goss, D., *K-Theory*, 1989, 1: 533—555.
[4] Schultheis, F., *J. Number Theory* 1990, **36**: 133—144.