一种省时的显式数值积分方案*

王 斌 季仲贞 曾庆存

(LASG，中国科学院大气物理研究所，北京100080)

关键词 特征方向法、显式完全平方守恒、无条件稳定、差分格式

显示完全平方守恒差分格式[1,2]尽管综合了经典平方守恒格式的优点，但其时间步长仍受到稳定性判据的限制. 怎样放宽这种限制正是本文要解决的中心问题. 基于迎风差格式[3]的思想，通过使用浮动算法[4]，我们改善了该类格式，使之从理论上无条件稳定. 由于该方法是从特征方向着手的，故称之为特征方向法.

为了讨论简便，以一维方程为基础，介绍特征方向法的基本原理.

考虑一维偏微分方程:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\mathscr{L}F=0 \quad (t\geqslant 0, x\in[a,b]), \tag{1}$$

其中

$$\mathscr{L}F=\frac{1}{2}\left[u\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(uF)\right], \tag{2}$$

$$F=F(x,t)\in C^1[a,b;0,T], \tag{3}$$

$$u=u(x,t,F)\in C^1, \tag{4}$$

C^1 表示一次连续可微. 显然，在周期或刚壁边界条件下，$\mathscr{L}$ 反对称. 给定$[a,b;0,T]$ 的一个均匀分划:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_I=b, 0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_N=T, \tag{5}$$

并记

$$D=\left\{(x_i,t_n)\,|\,x_i=x_0+(i-1)h,\ t_n=\tau n;\ h=\frac{b-a}{I},\right.$$

$$\left.\tau=\frac{T}{N};\ 0\leqslant i\leqslant I,\ 0\leqslant n\leqslant N\right\}, \tag{6}$$

F 在 D 上的值记为

$$(F)_i^n=F(x_i,t_n), \tag{7}$$

则利用实变函数和数学分析的知识，可证下列引理.

引理 1 设 $f(x)\in C^1[a,b]$，则 $g(x)=[f(x)]$ 满足

(1) $g(x)\overset{\text{a.e}}{\in} C[a,b]$,

(2) $g(x)$的导数几乎处处存在，且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\overset{\text{a.e}}{=}0$,

(3) 令 $r(x)=f(x)-g(x)$，则 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}$ 几乎处处存在，且 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\overset{\text{a.e}}{=}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$，其中，a.e = almost everywhere，即“几片处处”；“$\in$”表示“属于”，“$[\cdot]$”表示取整数部分.

1992-03-03 收稿，1992-06-30 收修改稿

* 国家基础性研究重大关键项目的部分资助

引理 2 对于 $t\in[t_n,t_{n+1}]$，设

$$\begin{cases} m^n(x)=\left[u(x,t_n)\dfrac{\tau}{h}\right], \\ u'(x,t)=u(x,t)-m^n(x)\dfrac{h}{\tau}, \end{cases} \tag{8}$$

令

$$F(x,t)=G\left(x-m^n(x)\frac{h}{\tau}(t-t_n),\ t\right), \tag{9}$$

则 (1) $(F)_i^n=(G)_i^n$, $(F)_i^{n+1}=(G)_{i-m_i^n}^{n+1}$;

(2) $\left(\dfrac{\partial F}{\partial t}\right)_i^n=\left(\dfrac{\partial G}{\partial t}\right)_i^n-m_i^n\dfrac{h}{\tau}\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)_i^n$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_i^n=\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)_i^n$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}m^n(x)\overset{\text{a.e}}{=}0$, $\dfrac{\partial u'}{\partial x}\overset{\text{a.e}}{=\!=}\dfrac{\partial u}{\partial x}$;

(4) $\left|\dfrac{u'\tau}{h}\right|<1$.

利用上述引理，易证下列定理。

定理 1 在条件(8)和(9)下，方程

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[u'\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(u'G)\right]=0, \tag{10}$$

在 D 上与方程

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[u\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(uF)\right]=0 \tag{1}$$

(几乎处处)等价，且在周期或刚壁边界条件下有

$$\frac{\partial}{\partial t}\|G\|^2=0.$$

定理 2 考虑与(10)式相容的差分格式：

$$\frac{G^{n+1}-G^n}{\tau}+L_nG^n+\varepsilon_n\tau B_nG^n=0, \tag{11}$$

其中

$$\begin{cases} B_nG^n=\dfrac{L_n\tilde{G}-L_nG^n}{\tau}, & (12) \\ \tilde{G}=G^n-\tau L_nG^n, & (12)' \end{cases}$$

L_n 为与 $\mathscr{L}$ 相容的空间差分算子(对 $\mathscr{L}$ 用空间中央差代替空间微商)。假设对固定的 n，L_n 线性，则 (1) 在周期或刚壁边界条件下，L_n 反对称；(2) $(B_nG^n,\ G^n)=\|L_nG^n\|^2>0$；(3) 若取

$$\varepsilon_n=1/(1+\sqrt{1-(K_n\tau)^2}), \tag{13}$$

$$K_n=\|B_nG^n\|/\|L_nG^n\|, \tag{14}$$

则格式(11)为显式完全平方守恒差分格式，且无条件稳定，即任给 $\tau>0$，均有

$$K_n\tau<1. \tag{15}$$

由定理 2 可得 G_i^{n+1}，再由引理 2 有

$$F_i^{n+1}=G_{i-m_i^n}^{n+1}. \tag{16}$$

然而，若简单地用(16)式反演求 F^{n+1}，则能量衰减。这是因为(16)式中的 F^{n+1} 是用迎风法求得的，具有较强的耗散性，故 $\|F^{n+1}\|^2 \leqslant \|G^{n+1}\|^2$，再由定理 2 和引理 2 可知，$\|G^{n+1}\|^2 = \|G^n\|^2 = \|F^n\|^2$，从而 $\|F^{n+1}\|^2 \leqslant \|F^n\|^2$。因此必须对(16)加以修正。为此，对(10)和(1)′式在 $t = t_n$ 时刻只进行时间差分，然后相减，并利用(9)式和 Taylor 展开定理得

$$(F)_i^{n+1} = (G)_{i-m_i^n}^{n+1} - \frac{1}{2}(m_i^n h)^2 \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + o(h^3).$$

用 $\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_{i-m_i^n}^{n+1}$ 代替 $\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_i^{n+1}$ 仍然有

$$(F)_i^{n+1} = (G)_{i-m_i^n}^{n+1} - \frac{1}{2}(m_i^n h)^2 \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_{i-m_i^n}^{n+1} + o(h^3). \tag{17}$$

基于(17)式，得到如下的修正反演公式：

$$F_i^* = G_{i-m_i^n}^{n+1}, \tag{18}$$

$$F_n^{n+1} = F_i^* - \sigma(m_i^n)^2(F_{i+1}^* - 2F_i^* + F_{i-1}^*), \tag{19}$$

其中 σ 为修正系数。最终可证如下定理。

定理 3 考虑(11),(12),(12)′和(18),(19)式，若取

$$\sigma = K_1/(1 + \sqrt{1 - K_1K_2}), \tag{20}$$

且 ε_n 满足(13),(14)式，其中

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{\|F^*\|^2 - \|G^{n+1}\|^2}{(\delta^2 F^*, F^*)}, \quad K_2 = \dfrac{\|\delta^2 F^*\|^2}{(\delta^2 F^*, F^*)}, \\ (\delta^2 F^*)_i = F_{i+1}^* - 2F_i^* + F_{i-1}^*, \end{cases} \tag{21}$$

则计算方案(11),(12),(12)′和(18),(19)显式完全平方守恒：

$$\|F^{n+1}\|^2 = \|F^n\|^2,$$

且无条件稳定：

$$\begin{cases} K_n\tau < 1, \\ K_1K_2 < 0. \end{cases} \tag{22}$$

为了检验特征方向法的实用性，将其用于正压“浅水”模式，并用理想的 Rossby-Haurwitz 波作数值试验。根据文献[5]的理论，适应过程为一快过程，因此它严重限制时间步长的选取。而对适应过程部分，在全球式半球模式中，严重限制差分格式时间步长的要素是 $a\cos\theta\Delta\lambda$，它在极点附近会变得很小，使稳定性判据得不到满足。因此，只要对适应过程部分在 λ 方向使用特征方向法便可大大增长时间步长，节省计算时间。为了便于特征方向法用于正压“浅水”模式适应过程部分的 λ 方向，必须对原始方程作适当的变换。首先，类似文献[1]和[2]，令

$$h = \sqrt{\Phi}, \quad U = uh, \quad V = vh, \tag{23}$$

再作等幅变换：

$$\begin{cases} \tilde{U} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\Phi - U), \\ \tilde{\Phi} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\Phi + U), \end{cases} \tag{24}$$

则原方程变为(关 U，Φ 的方程)：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \dfrac{1}{2a\cos\theta}\left[h\dfrac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial}{\partial \lambda}(h\tilde{U})\right] = R_{\tilde{U}} - f_1\tilde{\Phi}, \\ \dfrac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \dfrac{1}{2a\cos\theta}\left[h\dfrac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial}{\partial \lambda}(h\tilde{\Phi})\right] = R_{\tilde{\Phi}} + f_1\tilde{U}, \end{cases} \tag{25}$$

其中

$$\begin{cases} R_{\tilde{U}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{a\cos\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(h^*V) + f^*V - AU\right), \\ R_{\tilde{\Phi}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{a\cos\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(h^*V) - f^*V + AU\right), \\ f_1 = \dfrac{1}{a\cos\theta}\dfrac{\partial h}{\partial\lambda}, \\ AU = \dfrac{1}{2a\cos\theta}\left[\left(\dfrac{\partial uU}{\partial\lambda} + u\dfrac{\partial U}{\partial\lambda}\right) + \left(\dfrac{\partial v^*U}{\partial\theta} + v^*\dfrac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right]. \end{cases} \tag{26}$$

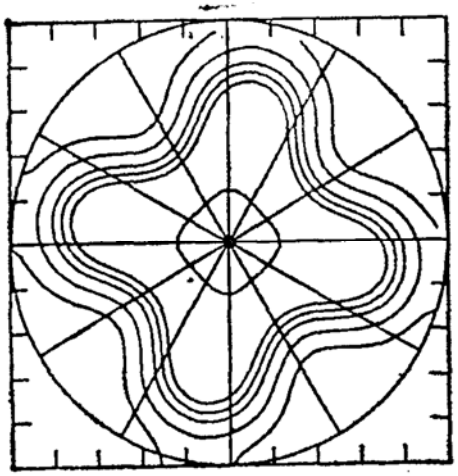

图 1　计算 R-H 波(60 天)

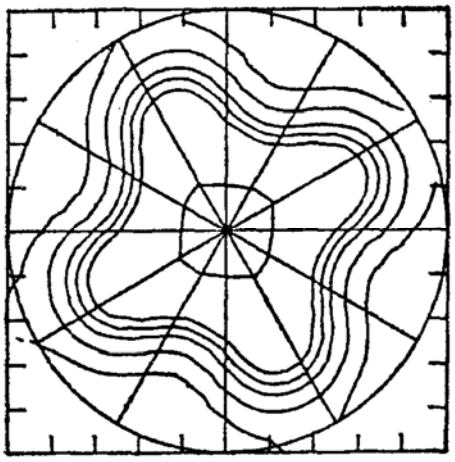

图 2　计算 R-H 波(120 天)

这样,特征方向法可直接用于(25)式的左端. 以 R-H 波为初始场，取 80×20 网格覆盖北半球,取时间步长 $\tau = 900$s， 则计算一天所花 CPU 时间约 10s，比原显式完全平方守恒差分格式节省一半多的时间(原花 23s). 积分 120 天，波形基本不变(见图 1 和图 2). 由此可知，特征方向法可获得良好的时间效益和计算效果.

参　考　文　献

[1] 王斌、季仲贞,科学通报,35(1990),10: 766—768.
[2] 季仲贞、王斌,大气科学,15(1991),2: 1—10.
[3] 曾庆存、季仲贞、袁重光,第二次全国数值天气预报会议论文集,科学出版社,1980,300—313.
[4] 王宗皓,科学探索, 1981, 1: 11—24.
[5] 曾庆存,数值天气预报的数学物理基础,第一卷,科学出版社, 1979.