# 真空的不稳定性和天体的非均匀分布

方 励 之
（中国科学技术大学）

## 一

对称性的自发破缺机制，是从粒子物理中发展起来的一种新观念．许多微观范围的理论都要在天体物理领域中得到进一步的印证和应用，探讨自发破缺在天体尺度上的效应是有意义的．本文打算分析一种可能的效应，即真空不稳定性在形成物质分布的非均匀性中的作用．

物质分布的非均匀性，是天体范围的一种普遍现象．恒星、星团、星系及至星系群和星系团，都是以团集的方式存在着．要说明这些天体的起源，首先应给出物质成团的机制．一种广泛采用的成团原因，是引力不稳定性[1]．它在说明恒星等较小尺度天体的形成上是行之有效的．然而，利用这种不稳定性去解释星系或星系团的成因，遇到了较大的困难，主要是大尺度上的普遍退行运动使引力不稳定性的聚集效率很低．在线性近似下，非均匀微扰只按 $t^{\alpha}$ 方式增长，$\alpha$ 的量级为1．要聚成星系，须经过极长的时间，远远大于根据球状星团等估计的星系年龄．

下面将证明，真空态的不稳定性，也会促使物质分布从均匀态向非均匀态过渡，也是一种物质成团的起因．而且，由于这种不稳定性本质上不属于引力相互作用范围，所以，不会受退行运动的影响．这一点，在引力不稳定性机制中是没有的．

我们具体采用李政道提出的反常核态模型[2-4]．按照这个理论，存在一种强作用的零自旋偶宇称的介子或共振．用玻色场 $\phi$ 描写这种介子，费米场 $\psi$ 描写自旋 1/2 的核场．介子与核子体系的拉氏函数为：

$$L = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)^2 - U_\phi - \psi^+ r_4\left(r_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_N + g\phi\right)\psi,$$

其中

$$U_\phi = \frac{1}{2}a\phi^2 + \frac{1}{3!}b\phi^3 + \frac{1}{4!}c\phi^4. \quad (1)$$

介子与核子间的耦合就是由 $m_N$ 换成 $m_{eff} = m_N + g\phi$ 而得到．这个体系，从介子角度看，最低能量态应为 $\phi \simeq 0$，而从核子角度看，应为 $\phi \simeq -\frac{m_N}{g}$．真正的最低能量态是由介子与核子二者能量权衡而定．在 $\phi \simeq 0$ 情况，核子有效质量 $m_{eff}$ 近于 $m_N$，是普通的核状态；在 $\phi \simeq -\frac{m_N}{g}$ 情况，$m_{eff} \simeq 0$，是一种反常的核态．可以一般地看到，当核子数密度较低时，体系总能主要由介子场决定，故应处在正常核态；反之，当核子数密度很大时，应处在反常核态．正常核态与反常核态间的转化，相当于一种相变，这种转变可能是突变式的，也可能是渐变式的．

我们关心的是大尺度上的问题，可以采用经典近似来处理这个体系，即 $\phi$ 作为经典场，核子体系作为简并费米气体，这时，有关 $\phi$ 场的哈密顿量（包括 $\phi$ 与核子间的作用项）为：

$$H = \int\left[\frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + U_\phi + U_N\right]d^3r, \quad (2)$$

本文 1976 年 10 月 15 日收到．

其中$\Pi$为$\phi$的共轭动量，$U_N$为核子体系的内能(包括静能)：

$$U_N = \frac{1}{\pi^2} K \int_0^{k_F} k^2 (k^2 + m_{eff}^2)^{\frac{1}{2}} dk, \quad (3)$$

已用$\hbar = c = 1$单位系. 对核物质$K = 2$，其中费米动量$k_F = (3\pi^2 n/K)^{\frac{1}{3}}$. $n$为核子数密度.

由$H$对$\phi$的变分，得$\phi$的方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + \frac{dU_\phi}{d\phi} + \left(\frac{\partial U_N}{\partial \phi}\right)_n = 0, \quad (4)$$

由于我们没有考虑核物质与其他体系相互作用而引起的耗散. 所以，对它们的空间运动可以使用理想流体的方程来描写. 即有，连续性方程(核子数或重子数的守恒)：

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\boldsymbol{v}) = 0; \quad (5)$$

运动方程，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{U_N} \nabla p - \frac{1}{U_N} \left(\frac{\partial U_N}{\partial \phi}\right)_n \nabla \phi, \quad (6)$$

其中$p$表示压力；还有一个关于比熵$\sigma$的方程，

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\sigma = 0. \quad (7)$$

在等熵情况$\sigma$= 常数，则由热力学关系可得，

$$pd\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{U_N}{n}\right) + \left(\frac{\partial U_N}{\partial \phi}\right) d\phi = kTd\sigma = 0.$$

式(4)—(7)，就是准经典近似下介子核子体系的基本方程组. 它的最简单解，是静态均匀解，这时$\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\nabla = 0$, $\boldsymbol{v} = 0$，并且

$$n = n_0, \ \phi = \phi_0, \ p = p_0, \quad (8)$$

按式(4)，$n_0$与$\phi_0$之间由下列方程联系：

$$\frac{dU_\phi}{d\phi} + \left(\frac{\partial U_N}{\partial \phi}\right)_n = 0. \quad (9)$$

上式可以对$\phi_0$求解，表示为$a$, $b$, $c$, $g$及$n_0$的函数. 在资料[3]中已经详细地讨论过式(9)的解. 当$n_0$较小时，$\phi_0 \simeq 0$, $m_{eff} \simeq m_N$，为正常核态. 随着$n_0$的增大，$\phi_0$将逐渐变到$-\frac{m_N}{g}$, $m_{eff} \simeq 0$，成为反常核态. 式(8)中的$p_0$也可以利用简并费米气体的物态方程由$n_0$确定.

## 二

现在讨论均匀解(8)的稳定性. 利用线性近似的微扰方法，在均匀解式(8)中如有小扰动，则

$$n = n_0 + n', \quad \phi = \phi_0 + \phi',$$
$$p = p_0 + p', \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}', \quad (10)$$

其中$n'$, $\phi'$, $p'$及$\boldsymbol{v}'$都是一级小量. 将式(10)代入式(4)—(7)，保留到一级项，得到等熵扰动下$\phi'$等的方程：

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi' + \left[\left(\frac{d^2 U_\phi}{d\phi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial \phi^2}\right)_0\right] \phi' + \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial \phi \partial n}\right)_0 n' = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}' = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{U_N}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0 \nabla n' - \frac{1}{U_N}\left(\frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_0 \nabla \phi' - \frac{1}{U_N}\left(\frac{\partial U_N}{\partial \phi}\right)_0 \nabla \phi', \quad (13)$$

下标0表示取均匀解(8)的值. 现在分别不同情况分析方程组式(11)—(13)的结论.

1. 无核子情况，或者作用常数$g = 0$，介子与核子间没有耦合. 这时只须保留方程(11)，

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi' + \left(\frac{d^2 U_\phi}{d\phi^2}\right)_0 \phi' = 0, \quad (14)$$

取解为

$$\phi' \sim \exp i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (15)$$

代入式(14)即有

$$-\omega^2 + k^2 + \left(\frac{d^2 U_\phi}{d\phi^2}\right)_0 = 0.$$

当$\omega$有虚数解时，为不稳定，它的条件是：

$$k^2 + \left(\frac{d^2 U_\phi}{d\phi^2}\right) < 0, \quad \text{或} \quad \left(\frac{d^2 U_\phi}{d\phi^2}\right)_0 < 0. \quad (16)$$

这个结果是在意料之中的，它表示只有 $U_\phi$ 的极小值才对应稳定态．但式(16)还包含有其他内容，如果把它写成：

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k} > 2\pi\left[-\left(\frac{d^2U_\phi}{d\phi^2}\right)_0\right]^{-\frac{1}{2}} \equiv \lambda_0, \quad (17)$$

这表示，对于一个较小的区域，即便其中有 $\left(\frac{d^2U_\phi}{d\phi^2}\right)_0 < 0$，只要区域的尺度小于 $\lambda_0$，就能免于上述的不稳定性．如果在宇宙空间中真空态按畴状结构分布，在一部分空间中 $\phi = 0$，在另一部分空间中

$$\phi = \phi_- \equiv \frac{3}{2c}\left[-b - \sqrt{b^2 - \frac{8}{3}ac}\right]$$

(0 及 $\phi_-$ 为 $U_\phi$ 的两个极小)，那么，在 0 区与 $\phi_-$ 区之间的畴壁中，$\phi$ 值在 0 与 $\phi_-$ 之间．若 $\phi$ 值在下列区间

$$\phi_A < \phi < \phi_B,$$

$$\phi_{A,B} = \frac{2}{c}\left[-b \mp \sqrt{b^2 - 2ac}\right],$$

则 $\left(\frac{d^2U_\phi}{d\phi^2}\right) < 0$，所以真空畴之间的壁厚不能大于 $\lambda_0$，倘使原来的畴壁较厚，不稳定的扰动将使畴壁收缩或者破碎，成为尺度小于 $\lambda_0$ 的薄壁．

2. 有核子情况，对式 (13) 求散度并用式 (12)，得：

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial t^2} = \frac{n_0}{U_N}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0 \nabla^2 n' + \frac{n_0}{U_N}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_0 + \left(\frac{\partial U_N}{\partial \phi}\right)_0\right]\nabla^2\phi'. \quad (18)$$

对 $\phi'$ 及 $n'$ 同样取形式(15)的解，代入式(11)及(18)，得到色散关系：

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + k^2 + \left(\frac{d^2U_\phi}{d\phi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi^2}\right)_0, & \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi\partial n}\right)_0 \\ \frac{n_0}{U_N}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\phi}\right)_0 + \left(\frac{\partial U_N}{\partial\phi}\right)_0\right]k^2, & -\omega^2 + \frac{n_0}{U_N}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0 k^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

现在，出现不稳定性的条件为：

$$k^2 + \left(\frac{d^2U_\phi}{d\phi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi^2}\right)_0 < \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi\partial n}\right)_0\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\phi}\right)_0 + \left(\frac{\partial U_N}{\partial\phi}\right)_0\right]\Big/\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0, \quad (20)$$

由于 $p = n\frac{\partial U_N}{\partial n} - U_N$，所以，开始出现不稳定性的条件为

$$\left(\frac{d^2U_\phi}{d\phi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi^2}\right)_0 < n\left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi\partial n}\right)_0^2\Big/\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0, \quad (21)$$

因此，只要下式成立

$$\left(\frac{d^2U_\phi}{d\phi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi^2}\right)_0 \leqslant 0, \quad (22)$$

条件 (21) 就可以满足．这个结果是式 (16) 的自然推广，它表示，在式 (9) 的解中，只有那些相应于 $U_\phi + U_N$ 的极小值的解，才有可能是稳定的．

值得注意的是，对于式 (9) 的相应于极小值的解，也并不一定稳定，而可能出现非均匀化的不稳定性．因为，对这些解，当接近相变时，$\left(\frac{d^2U_\phi}{d\phi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi^2}\right)_0 \simeq 0$，故式 (21) 必能成立．它说明，在相变附近，任何均匀解，无论是相应于极大的还是极小的．都是不稳定的，必定要发生非均匀化．这个结果，仅仅根据静态能量的讨论，是得不到的．

对于 $\sigma$ 模型，式(1)中的系数为 $a = m_\sigma^2$，$c = 3\left(\frac{m_\sigma}{m_N}\right)^2 g^2$，$b^2 = 3ac$．所以，$\frac{dU_\phi}{d\phi} = 0$ 的三个根分别为 0，$\phi_+ = -\frac{m_N}{g}$，$\phi_- = -\frac{2m_N}{g}$．0 及 $\phi_-$ 为 $U_\phi$ 的极小，$\phi_+$ 为极大，并且 $U_\phi(0) = U_\phi(\phi_-) = 0$，$U_\phi(\phi_+) = \frac{1}{8}\frac{m_\sigma^2 m_N^2}{g^2}$．由式 (9) 可知，反常核态解为 $\phi_0 = \phi_+$．再由式 (1) 及 (3)，$\left(\frac{d^2U_\phi}{d\phi^2}\right)_0 = -\frac{1}{2}m_\sigma^2$，$\left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi^2}\right)_0 = \frac{K}{2\pi^2}g^2k_F^2$，$\left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi\partial n}\right)_0 = 0$，代入式

(21)，就得到反常核态均匀解开始出现不稳定性的条件为：

$$n < \frac{\pi}{3k^{1/2}}\left(\frac{m_\sigma}{g}\right)^3. \tag{23}$$

如取 $m_\sigma = 700$ Mev，$\frac{g^2}{4\pi} \simeq 1$，则 $n \sim 10^{-2}$(核密度)．对较弱耦合(即 $g$ 小)情况，出现不稳定性的密度要高些．

## 三

若星系谱线红移是由于多普勒效应引起的，则在星系团尺度之上，存在着系统性的膨胀运动．总体的膨胀式运动，对于真空不稳定性的非均匀化过程有什么影响？这是在联系天体成团问题时，会遇到的一个问题．严格地说，这个问题中不仅应当考虑介子核子间的作用，还应考虑引力的作用．因为，在长程、大质量的条件下，引力的作用是重要的．由于现在的目的只是讨论膨胀运动对真空不稳定的成团机制的影响，可暂时略掉引力的作用．引力的总效果是加强而不是削弱非均匀性的增长，所以，这种简化不会改变基本的结论．

代替方程组(4)—(7)的静态均匀解(8)，现在用膨胀均匀解：

$$n_e = n_0\left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^3,\quad \mathbf{v}_e = \mathbf{r}\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right),$$
$$p_e = p_e(t),\quad \phi_e = \phi_e(t), \tag{24}$$

其中 $n_0$，$R_0$ 为常数，函数 $R(t)$ 可由式(6)解出为：

$$R(t) = Dt, \tag{25}$$

$D$ 是常数，决定膨胀速度（如考虑引力，则 $R \propto t^{\frac{2}{3}}$)，函数 $p_e(t)$ 可由物态方程 $p = p(n)$ 确定．$\phi_e(t)$ 是下列方程的解：

$$\frac{d^2\phi_e}{dt^2} + \frac{dU_\phi}{d\phi} + \left(\frac{\partial U_N}{\partial \phi}\right)_0 = 0. \tag{26}$$

类似于上节的做法，令 $n = n_e + n'$，$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}'$，$\phi = \phi_e + \phi'$．在线性近似下，求微扰量 $n'$，$\mathbf{v}'$，$\phi'$ 的方程．如取

$$n' = n_1(t)\exp\left\{i\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}{R(t)}\right\},$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(t)\exp\left\{i\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}{R(t)}\right\},$$
$$\phi' = \phi_1(t)\exp\left\{i\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}{R(t)}\right\}, \tag{27}$$

则关于 $n_1$，$\mathbf{v}_1$，$\phi_1$ 的方程为：

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + 3\frac{\dot{R}}{R}n_1 + in_e\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)}{R} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{\dot{R}}{R}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{U_N}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_e\frac{i\mathbf{k}}{R}n_1 + \frac{1}{U_N}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_e + \left(\frac{\partial U_N}{\partial \phi}\right)_e\right]\frac{i\mathbf{k}}{R}\phi_1 = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} + \frac{k^2}{R^2}\phi_1 + \left[\left(\frac{d^2U_\phi}{d\phi^2}\right)_e + \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi^2}\right)_e\right]\phi_1 + \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi\partial n}\right)_e n_1 = 0. \tag{30}$$

若定义 $\varepsilon'(t) \equiv n_1/n_e$，则由式(28)，(29)可得：

$$\frac{d^2\varepsilon'}{dt^2} + 2\frac{\dot{R}}{R}\frac{d\varepsilon'}{dt} + \frac{n_e}{U_N}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_e\frac{k^2}{R^2}\varepsilon'(t) + \frac{1}{U_N}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\phi}\right)_e + \left(\frac{\partial U_N}{\partial\phi}\right)_e\right]\frac{k^2}{R^2}\phi_1 = 0.$$

由式(25)，再做变换 $\varepsilon = \varepsilon' t$，上式成为

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \left[\frac{n_e}{U_N}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_e\frac{k^2}{R^2} - \frac{1}{t^2}\right]\varepsilon + \frac{t}{U_N}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\phi}\right)_e + \left(\frac{\partial U_N}{\partial\phi}\right)_e\right]\frac{k^2}{R^2}\phi_1 = 0, \tag{31}$$

式(30)及(31)就是关于稳定性的方程，它们在形式上与式(11)及(18)相似．然而，由于 $n_e$，$U_N$，$\left(\frac{\partial p}{\partial\phi}\right)_e$ 等现在都是 $t$ 的函数，所以，在一般情况下，求严格解是困难的．

先来讨论 $\sigma$ 模型特例．这时，式(26)仍有解 $\phi_e = -\frac{m_N}{g}$，对应于反常核态．故 $\left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial\phi\partial n}\right)_e = 0$．关于真空稳定性的方程(30)成为：

$$t^2\frac{d^2\phi_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\phi_1 - \frac{1}{2}m_\sigma^2 t^2\phi_1 = 0, \tag{32}$$

其中 $\nu^2 \equiv \frac{1}{4} - \frac{k^4}{D^2} - \left(\frac{9K}{8\pi^2}\right)^{1/3}\left(g\frac{R_0}{D}\right)^2 n_0^{2/3}$. 这个方程的解，是 Bessel 函数.

$$\phi_1 = C_1\sqrt{t}\, I_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{2}} m_\sigma t\right) + C_2\sqrt{t}\, I_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{2}} m_\sigma t\right),$$

它的渐近行为是 $\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}} m_\sigma t\right)$. 因此，非均匀性的增长速度不仅不因物质的膨胀运动有丝毫减弱，而且，连条件 (23) 也不必要了. 或者说，膨胀运动的背景在效果上等价于式 (23)必定成立. 总之，在 $\sigma$ 模型中，膨胀运动是加强了反常真空态的不稳定性. 这同膨胀运动对引力不稳定性的作用是完全相反的.

对于一般情况，可以用 WKB 方法讨论式 (30)，(31) 解的性质，即有

$$n_1(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\omega(t)}} \exp\left[i\int^t \omega(t)dt\right] \text{ 等.}$$

WKB 方法的适用条件为 $\left|\frac{1}{\omega^2}\frac{d\omega}{dt}\right| \ll 1$. 如果再满足条件 $|\omega| \gg 1/t$，则出现不稳定性的条件仍与式 (20) 相似，只须作下述代换：下标 $0 \to e$；$k^2 \to k^2/R^2$. 由于 $1/\omega$ 为核过程的时标，$\omega \Big/ \frac{d\omega}{dt}$ 及 $t$ 为膨胀运动的时标，前者比后者小得多，上述两个条件一般是成立的. 这样就证明了，非均匀微扰的增长速度不明显受膨胀运动的影响.

以上的论证都是在 $\hbar \to 0$ 极限情况下进行的. 这种处理在讨论真空态问题上，是可以的. 量子的修正不大，例如高阶圈图只对 $U_\phi$ 引进不大的修正项，在树图近似下已足够好地得到主要的结果[3]. 这些修正对于我们这里关心的问题，是没有实质性影响的.

总之，无论有无膨胀式背景运动，在临近真空态相变时，都会发生迅速的非均匀化过程. 这个一般性的结论，看来并不十分强地依赖于模型的细节，如果星系是由初始高密的总星系演化而来的，那么，引力不稳定性成团说中所遇到的困难，一部分可由真空不稳定性加以解决. 按照这种观点，星系核及类星体，就是其中可能存在反常核态或反常真空的重要候选者.

## 参 考 资 料


[1] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, 1972.
[2] Lee, T. D. & Wick, G. C., *Phys. Rev.*, **9D** (1974), 2291.
[3] Lee, T. D. & Margulies, M., *Phys. Rev.*, **11D** (1975), 1591.
[4] Lee, T. D., *Rev. Mod. Phys.*, **47** (1975), 267.


[上接 268 页]

$L_p$ 二部分构成，它们分别是 $Z^2/r$ 和 $Z^{*2}/r$ 的函数，代入上式即得非惰气构型离子的水解常数计算式式 (4).

## 参 考 资 料


[1] Hunt, J. P., *Metal Ions in Agueous Solution*, New York, 1963.
[2] Moeller T. *et al.*, *Ions in Agueous Systems*, McGraw-Hill, New York, 1972.
[3] Kraus, K. A. *et al.*, *J. Am. Chem. Soc.*, **72** (1950), 3901; **81** (1959), 1569.
[4] Sillén, L. G. *et al.*, *Acta Chem. Scand.*, **1** (1947), 631; **21** (1966), 147.
[5] Chem. Soc. (London), *Stability Constants*, 1964.
[6] 乔明伦，化学通报，1958，1，81.
[7] Б. В. 涅克拉索夫，普通化学教程，高等教育出版社，1955，759.
[8] Рахимбаев Ш. М. и Нурматов Ш. М., *Докл. Акад, Наук Таджс.* ССР., **13** (1970), 12, 37.
[9] 温元凯、邵俊，地球化学，1973，4，276.
[10] 温元凯、邵俊，地球化学，1975，1，35.
[11] 温元凯、邵俊，科学通报，**20** (1975)，3，131.
[12] 温元凯、邵俊，科学通报，**21** (1976)，2，84.