科学通报
第40卷 第11期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1995年 6月

关于显式平方守恒格式精度的证明*

王 斌**
(LASG, 中国科学院大气物理研究所, 北京 100080)

关键词 显式平方守恒格式 计算法 精度

自从我们建立显式平方守恒格式以来[1,2], 该类格式得到了很大的发展和完善[3~6], 并在实际应用中取得了显著的省时效果[7,8], 节省了 5～8 倍的 CPU 时间. 因此, 该类格式不仅具有重要的理论意义, 而且具有很强的实用价值.

为了使显式平方守恒格式能够得到进一步的推广和应用, 近年来我们对它作了更深入的研究. 我们先从理论上进行了改进和完善工作, 然后在大气环流模式、短期气候谱模式以及 Hamilton 系统等中作了应用检验, 均取得良好的效果[1]. 其中一个重要的完善工作就是本文将要介绍的关于显式平方守恒格式精度的理论证明, 关于这类格式的精度, 在作者的博士论文[2]和文献[3]中虽给出了一个估计性定理, 但只就特殊情形作了验证, 并没有给出一般的证明方法. 为了完善这方面的工作, 本文将给出一个证明.

对于非线性发展方程:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = LF, \tag{1}$$

假定 L 反对称:

$$(LF,\ F) = 0, \tag{2}$$

则方程(1)具有平方守恒性:

$$\frac{d}{dt}\ \|F\|^2 = 0. \tag{3}$$

根据文献[1 ～ 3], 求解方程(1)的显式平方守恒格式可写为

$$\frac{F^{n+1}-F^n}{\tau} = LF^n + \varepsilon\tau BF^n \tag{4}$$

或

$$F^{n+1} = F^n + \tau\ LF^n + \varepsilon\tau^2 BF^n, \tag{4}'$$

其中 τ 满足 $2K_3\tau < 1$, ε 满足

1994-10-28 收稿, 1995-01-26 收修改稿
*国家科委"攀登计划"重大关键项目和国家自然科学基金资助项目
**原为中国科学院计算中心博士后
1) 王 斌. 低速流数值模拟中的一些计算方法. 博士后论文, 中国科学院计算中心, 1994
2) 王 斌. 论守恒差分格式. 博士论文, 中国科学院大气物理研究所, 1992

$$\varepsilon=\varepsilon_n=-K_1/[1+\tau K_2+\sqrt{(1+\tau K_2)^2-\tau^2K_1K_3}\ ], \tag{5}$$

$$K_1=\frac{\|LF^n\|^2}{(BF^n,\ F^n)},\quad K_2=\frac{(BF^n,\ LF^n)}{(BF^n,\ F^n)},\quad K_3=\frac{\|BF^n\|^2}{(BF^n,\ F^n)}. \tag{6}$$

并有下列关于该格式精度的定理[3]:

定理　若格式(4)中的耗散算子 B 为 k 阶协调耗散算子，则由(4)～(6)决定的显式平方守恒格式具有 $k+1$ 阶精度.

由于一直没能给出该定理的一般证明，因此，我们下面给出一个证明.

证　假定 F^n 为精确解，即 $F^n=(F)^n$，且 F 充分光滑.

i) 我们先来证明：当 $\tau\to 0$ 时，$K_1\to -1$，$K_2\to -\frac{\partial}{\partial t}\ln\|(LF)^n\|$，

$$K_3\to -\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}LF\right)^n\right\|^2/\|(LF)^n\|^2 \text{ 以及 } \varepsilon\to\frac{1}{2}.$$

事实上，由于 $BF=\frac{\partial^2F}{\partial t^2}+O(\tau)$，$LF=\frac{\partial F}{\partial t}$，及 $(LF,\ F)=0$，故

$$(BF,\ F)=\left(\frac{\partial^2F}{\partial t^2},\ F\right)+O(\tau)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial t},\ F\right)-\left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\|^2+O(\tau)=-\|LF\|^2+O(\tau),$$

从而，由(6)式可得

$$K_1=\frac{\|LF^n\|^2}{(BF^n,\ F^n)}=\frac{\|LF^n\|^2}{\{-\|(LF)^n\|^2+O(\tau)\}}\xrightarrow[\tau\to 0]{}-1,$$

$$K_3=\frac{\|BF^n\|}{(BF^n,\ F^n)}=\frac{\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial t}+O(\tau)\right)\right\|}{\{-\|(LF)^n\|^2+O(\tau)\}}\xrightarrow[\tau\to 0]{}-\frac{\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}LF\right)^n\right\|^2}{\|(LF)^n\|^2}.$$

同样可证

$$(BF,\ LF)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|LF\|^2+O(\tau),$$

这样便有

$$K_2=\frac{(BF^n,\ LF^n)}{(BF^n,\ F^n)}\xrightarrow[\tau\to 0]{}-\frac{\partial}{\partial t}\ln\|(LF)^n\|.$$

利用(5)式和上面的结论易证：$\varepsilon\xrightarrow[\tau\to 0]{}\frac{1}{2}$.

ii) 其次可证：K_1，K_2，K_3 满足

$$K_1+(1+\tau K_2)+\frac{1}{4}\tau^2K_3=O(\tau^k). \tag{7}$$

为了证明上述结论，我们将 $(F)^{n+1}$ 作 Taylor 展开:

$$(F)^{n+1}=(F)^n+\tau\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^n+\frac{1}{2}\tau^2\left(\frac{\partial^2F}{\tau t^2}\right)^n+\frac{1}{6}\tau^3\left(\frac{\partial^3F}{\partial t^3}\right)^n$$

$$+\cdots\frac{1}{(k+1)!}\tau^{k+1}\left(\frac{\partial^{k+1}F}{\partial t^{k+!}}\right)^n+O(\tau^{k+2}).$$

由定理假设，B 为 k 阶协调耗散算子，故由文献[3]便得

$$(F)^{n+1}=(F)^n+\tau(LF)^n+\frac{1}{2}\tau^2(BF)^n+O(\tau^{k+2})=F^n+\tau LF^n+\frac{1}{2}\tau^2BF^n+O(\tau^{k+2}).$$

由于 $(F)^{n+1}$ 和 $(F)^n$ 均为精确解，所以在条件(2)下有

$$\|(F)^{n+1}\|^2=\|(F)^n\|^2=\|F^n\|^2,$$

从而有

$$\|(F)^{n+1}\|^2=\left\|F^n+\tau LF^n+\frac{1}{2}\tau^2BF^n\right\|^2+O(\tau^{k+2})=\|F^n\|^2,$$

简化并利用(6)式便可得到(7)式.

iii) 对(4)′两边取范数并利用其平方守恒性可直接推出 ε 满足

$$K_1+(1+\tau K_2)2\varepsilon+\tau^2K_3\varepsilon^2=0. \tag{8}$$

iv) 我们还可证明 $\varepsilon=\frac{1}{2}+O(\tau^k)$.

事实上，将(8)式减去(7)式整理得

$$\left[1+\tau K_2+\frac{1}{4}\tau^2K_3(2\varepsilon+1)\right](2\varepsilon-1)=O(\tau^k).$$

利用 i) 可知，$1+\tau K_2+\frac{1}{4}\tau^2K_3(2\varepsilon+1)\xrightarrow[\tau\to 0]{}1$，因此，$2\varepsilon-1=O(\tau^k)$，即 $\varepsilon=\frac{1}{2}+O(\tau^k)$.

v) 最后，我们来证明定理的结论.

由 ii) 可知，$(F)^{n+1}=(F)^n+\tau(LF)^n+\frac{1}{2}\tau^2(BF)^n+O(\tau^{k+2})$，即

$$\frac{(F)^{n+1}-(F)^n}{\tau}-(LF)^n-\frac{1}{2}\tau(BF)^n=O(\tau^{k+1}).$$

因此，由 iv) 便可容易推出：

$$\frac{(F)^{n+1}-(F)^n}{\tau}-(LF)^n-\varepsilon\tau(BF)^n=\frac{(F)^{n+1}-(F)^n}{\tau}-(LF)^n$$

$$-\left[\frac{1}{2}+O(\tau^k)\right]\tau(BF)^n=O(\tau^{k+1}),$$

即格式(4)具有 $k+1$ 阶精度. 至此，定理全部证毕.

参 考 文 献

1 王 斌，季仲贞. 显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验. 科学通报，1990, 35(10): 766～768
2 季仲贞，王 斌. 再论发展方程差分格式的构造和应用. 大气科学，1991, 15(2): 1～10
3 王 斌，季仲贞. 协调耗散算子与显式完全平方守恒差分格式. 中国科学，B 辑，1993, 23(6): 665～672
4 Wang Bin, Ji Zhong-zhen. An improved splitting method. Advances in Atmospheric Sciences, 1993, 10(4): 447～452
5 王 斌，季仲贞，曾庆存. 一种省时的显式数值积分方案. 科学通报，1992, 37(24): 2 247～2 250
6 王 斌，季仲贞，曾庆存. 一种新的区域分离法. 力学学报，1994, 26(5): 530～535
7 王 斌，季仲贞，李荣凤. 显式完全平方守恒差分格式在近岸海流数值模拟中的应用. 热带海洋，1994, 13(3): 1～7
8 王 斌，季仲贞. 一类快速经济算法. 自然科学进展，1994, 4(4): 417～422