计划经济大范围最优化的数学理论

(VIII) 论 Brouwer 不动点定理

华 罗 庚

(中国科学院,北京)

在拓扑学上有一条著名的 Brouwer 不动点定理*:

一个连续映象 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 把单位球 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'\leqslant 1$ 映入其自己,即 $\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}'\leqslant 1$ 的一部分或全部,则一定存在一个不动点,即有 $\boldsymbol{c}$,使 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})$.

这个存在性的定理有广泛的应用,成为现代经济学派的一个重要工作(见文献[1]). 本系列文章中常用的 Perron-Frobinius 定理也可以由这定理推导出来.

命 A 是一非负方阵,作以下的映象

$$\boldsymbol{y}=\frac{1}{\sigma(\boldsymbol{x}A)}\boldsymbol{x}A, \tag{1}$$

这儿 $\sigma(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i$. 这一映象把

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1,\quad x_i\geqslant 0\ (1\leqslant i\leqslant n) \tag{2}$$

映入其自己. (2)式是一个 $n-1$ 维的单纯形,这与 $n-1$ 维单位球拓扑等价. 因此 Brouwer 定理可用,即有一矢量 $\boldsymbol{c}$ ($\boldsymbol{c}$ 在 (2) 式中) 适合于

$$\boldsymbol{c}=\frac{1}{\sigma(\boldsymbol{c}A)}\boldsymbol{c}A. \tag{3}$$

这仍与 Perron-Frobinius 定理有一定的距离,因为那儿要求的是 $\boldsymbol{c}>0$ 而不仅是 $\boldsymbol{c}\geqslant 0$. 这要求当然超出了 Brouwer 定理所可能得到的结论. 但我们可以利用特殊性立刻证明此点.

如果 $\boldsymbol{c}$ 是(2)式的边界点,我们不妨假定 $\boldsymbol{c}=(0,\cdots,0,c_{r+1},\cdots,c_n)$, $c_{r+1}>0,\cdots,c_n>0$. 代入 (3) 式得

$$\sum_{i=r+1}^{n}c_ia_{ij}=0,\quad 1\leqslant j\leqslant r$$

由此得,对所有适合于

$$r+1\leqslant i\leqslant n,\quad 1\leqslant j\leqslant r$$

的 i, j 常有 $a_{ij}=0$,即 A 是可分拆的. 因此证明了 Perron-Frobinius 定理.

关于不动点是否唯一,这性质决不能由 Brouwer 定理推出来. 因为我们可以举出许多例子表明在 Brouwer 定理的假定下,可以有多个甚至于有无穷个不动点的情况. 但对我们所考虑的情况,有以下的结果.

本文 1984 年 3 月 6 日收到.

* 关于 Brouwer 定理的简洁证明请看 Milnor, J., *Amer. Math. Monthly.*, **85** (1978), 521−524.

由(3)式可知A有非负特征根 $\sigma(cA)=g$，且当A不可分拆时有正特征矢量$\boldsymbol{c}$. 当然A还有一右正特征矢量，即有$\boldsymbol{d}$使

$$A\boldsymbol{d}'=g\boldsymbol{d}'. \tag{4}$$

如果 $g_1(\neq g)$ 也是特征值，其特征矢量是 $\boldsymbol{c}_1$，即

$$\boldsymbol{c}_1A=g_1\boldsymbol{c}_1,$$

考虑

$$g_1\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{d}'=\boldsymbol{c}_1A\boldsymbol{d}'=g\boldsymbol{c}'\boldsymbol{d}',$$

因而

$$\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{d}'=0. \tag{5}$$

由 $\boldsymbol{d}>0$，可见 $\boldsymbol{c}_1$ 一定不是正矢量.

留下来的情况是 $g_1=g$，而 $\boldsymbol{c}_1\neq\lambda\boldsymbol{c}$ 的情况. 如此，必然 $\boldsymbol{c}-\alpha\boldsymbol{c}_1$ 也是以 g 为特征值的矢量，命 α_0 是使

$$\boldsymbol{c}_2=\boldsymbol{c}-\alpha_0\boldsymbol{c}_1\geqslant 0,$$

且出现零支量的最小的正数. 不妨假定

$$\boldsymbol{c}_2=(0,\cdots,0,c_{r+1},\cdots,c_n),\ c_{r+1}>0,\cdots,c_n>0.$$

如此可以推出A是可分拆的，因此证明了唯一性.

以上一些现象的出现，都是在于 Brouwer 定理的假定太一般了. 更进一步，在他的假定下还可能出现极限环等现象. 因此我们的基本定理由拓扑学的观点来看是难以得到的. 我们的结果可以说成为，如果$\boldsymbol{x}$不是不动点，则一定有一正整数 l 存在使

$$f^l(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}$$

在原区域中无解.

本文所导出的模型是特殊的，特殊问题用特殊方法处理，因而可以得出更深入的结果. 因此也说明了在经济学领域内使用 Brouwer 不动点定理的局限性. 因为用了这条定理，它不仅无法具体算出不动点何在，而且以上说到的一些现象也无法由此推出.

参 考 文 献

[1] Debreu, G., *Theory of Values——An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1959，及该书引证的其它文献.