磁流体力学旋转间断的稳定性

王 水　　朱 烈

（中国科学技术大学，合肥）

磁层顶结构可以分为切向间断和旋转间断两种类型[1]．很多作者已详细地讨论了磁层顶切向间断的结构和稳定性[2-4]；而对已被卫星观测到的磁层顶旋转间断的结构及其稳定性问题[5,6]，理论上还了解得很少[7]．旋转间断与白日侧磁层顶处重联位形以及尾部磁层顶中能量输运过程密切相关．太阳风等离子体可以通过磁层顶旋转间断直接进入磁层，旋转间断中的粒子能够增长或损失其能量[1]．因此，旋转间断的结构、稳定性及其伴随的物理过程，是空间等离子体物理中一个十分重要的研究课题．

一些作者曾经指出，在不可压缩流体中，当磁场为任何值时，旋转间断对无穷小扰动而言总是稳定的[8]．本文重新审查了这个结论．结果表明，不可压缩流体中的旋转间断并不总是稳定的．我们还导出了磁流体力学旋转间断的不稳定性条件．

对于不可压缩、理想导电和完全电离的等离子体，可以利用下列磁流体力学方程组

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0, \tag{1}$$

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\right] = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}), \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0, \tag{5}$$

式中所有参数都具有通常的意义．我们假设旋转间断的法线方向为 i_x，且间断面两侧等离子体密度、速度和磁场分别是均匀的．则当旋转间断上存在一个沿着间断面传播的扰动时，任一物理量 q 皆可表达为

$$q = q_0 + \hat{q}(x)\exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \tag{6}$$

式中角标"0"表示基态量，它们满足旋转间断的相容条件：

$$[\rho_0] = 0,\ [P_0] = 0,\ [V_x] = 0,\ [B_x] = 0,\ [B_\tau] = 0, \tag{7}$$

$$[\boldsymbol{V}_\tau] = \frac{V_x}{B_x}[\boldsymbol{B}_\tau], \qquad V_x = \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho_0}},$$

式中[ ]表示间断面两侧参数的差值，角标 τ 表示切向分量．

将(6)式代入方程组(1)—(5)式后，我们得到下列线性的扰动振幅方程组

$$-i\omega^*\hat{\rho} + V_x\frac{d\hat{\rho}}{dx} = 0, \tag{8}$$

本文 1984 年 8 月 8 日收到．

$$-i\omega^*\hat{u}+V_x\frac{d\hat{u}}{dx}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{d\Phi}{dx}+\frac{i}{4\pi\rho_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)\hat{b}_x+\frac{B_x}{4\pi\rho_0}\frac{d\hat{b}_x}{dx},\tag{9}$$

$$-i\omega^*\hat{v}+V_x\frac{d\hat{v}}{dx}=-\frac{i}{\rho_0}k_y\Phi+\frac{i}{4\pi\rho_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)\hat{b}_y+\frac{B_x}{4\pi\rho_0}\frac{d\hat{b}_y}{dx},\tag{10}$$

$$-i\omega^*\hat{w}+V_x\frac{d\hat{w}}{dx}=-\frac{i}{\rho_0}k_z\Phi+\frac{i}{4\pi\rho_0}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)\hat{b}_z+\frac{B_x}{4\pi\rho_0}\frac{d\hat{b}_z}{dx},\tag{11}$$

$$-i\omega^*\hat{b}_x+V_x\frac{d\hat{b}_x}{dx}=i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)\hat{u}+B_x\frac{d\hat{u}}{dx},\tag{12}$$

$$-i\omega^*\hat{b}_y+V_x\frac{d\hat{b}_y}{dx}=i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)\hat{v}+B_x\frac{d\hat{v}}{dx},\tag{13}$$

$$-i\omega^*\hat{b}_z+V_x\frac{d\hat{b}_z}{dx}=i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)\hat{w}+B_x\frac{d\hat{w}}{dx},\tag{14}$$

$$\frac{d\hat{b}_x}{dx}+ik_y\hat{b}_y+ik_z\hat{b}_z=0,\tag{15}$$

$$\frac{d\hat{u}}{dx}+ik_y\hat{v}+ik_z\hat{w}=0,\tag{16}$$

式中 $\hat{u}$、$\hat{v}$、$\hat{w}$ 和 $\hat{b}_x$、$\hat{b}_y$、$\hat{b}_z$ 分别是扰动速度振幅 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 和扰动磁场振幅 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 的三个分量；波矢量 $\boldsymbol{k}$、Doppler 频率 ω^* 和扰动总压力的振幅 Φ 为

$$\boldsymbol{k}=k_y\boldsymbol{i}_y+k_z\boldsymbol{i}_z,\quad \omega^*=\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_0,\quad \Phi=\hat{p}+\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B}_0\cdot\hat{\boldsymbol{b}}).\tag{17}$$

利用旋转间断的相容条件(7)式，由方程(9)和(12)式、方程(10)和(13)式、方程(11)和(14)式可以分别得到

$$a_x=\frac{1}{\alpha\rho_0}\frac{d\Phi}{dx},\tag{18}$$

$$a_y=\frac{i}{\alpha\rho_0}k_y\Phi,\tag{19}$$

$$a_z=\frac{i}{\alpha\rho_0}k_z\Phi,\tag{20}$$

式中

$$\alpha=i\omega^*+\frac{i}{\sqrt{4\pi\rho_0}}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0),\quad \boldsymbol{a}=\hat{\boldsymbol{v}}+\frac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{4\pi\rho_0}},\tag{21}$$

而 a_x、a_y、a_z 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的三个分量．由方程(15)、(16)和(21)式可以进一步得到

$$\frac{da_x}{dx}+ik_ya_y+ik_za_z=0.\tag{22}$$

最后，利用方程(18)—(20)和(22)式，得到仅含有函数 Φ 的二阶常微分方程

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}-k^2\Phi=0.\tag{23}$$

取旋转间断位于 $x=0$ 处，角标“1”和“2”分别表征间断面两侧的参量．考虑到在 $x\to\pm\infty$ 处 Φ 必须有限，由方程(23)和(18)式得到

$$\Phi=\begin{cases}A_1e^{kx}, & (-\infty<x\leqslant 0),\\ A_2e^{-kx}, & (0\leqslant x<\infty),\end{cases}\tag{24}$$

$$a_x=\begin{cases}\dfrac{kA_1}{\alpha_1\rho_0}e^{kx}, & (-\infty<x\leqslant 0),\\ -\dfrac{kA_2}{\alpha_2\rho_0}e^{-kx}, & (0\leqslant x<\infty),\end{cases}\tag{25}$$

式中 A_1、A_2 为待定常数. 由方程 (7) 式不难得到，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$. 可以看出，$\alpha=0$ 是方程(18)—(20)和方程(25)式的奇点. 这种情况下的色散关系为

$$\omega=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_0-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)}{\sqrt{4\pi\rho_0}}.\tag{26}$$

显然,对于这种扰动,旋转间断是稳定的.

在一般情况下,扰动以后的间断面必须满足下列相容条件

$$[\boldsymbol{i}_x\cdot(\rho_0\hat{\boldsymbol{v}}+\hat{\rho}\boldsymbol{V}_0)]=0,\tag{27}$$

$$\left[\hat{\rho}\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{i}_x\cdot\boldsymbol{V}_0)+\rho_0\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{i}_x\cdot\hat{\boldsymbol{v}})+\rho_0\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{i}_x\cdot\boldsymbol{V}_0)+\left(p+\frac{\boldsymbol{B}_0\cdot\hat{\boldsymbol{b}}}{4\pi}\right)\boldsymbol{i}_x\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{i}_x\cdot\boldsymbol{B}_0)\hat{\boldsymbol{b}}-\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{i}_x\cdot\hat{\boldsymbol{b}})\boldsymbol{B}_0\right]=0,\tag{28}$$

$$[\boldsymbol{i}_x\cdot\hat{\boldsymbol{b}}]=0.\tag{29}$$

根据方程(24)、(25)及(27)—(29)式,我们分两种情况来讨论旋转间断的稳定性.

(1) 若扰动密度 $\hat{\rho}=0$,或在间断面上 $[\hat{\rho}]=0$，即扰动后间断面仍保持为旋转间断. 则由方程(27)—(29)式得到界面上必须满足的边界条件为: (1)Φ 在界面上连续; (2) a_x (或 $\hat{b}_x$ 和 $\hat{u}$)在界面上连续. 由方程(24)、(25)式及这些边界条件,求出下列色散关系

$$\omega=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_0)_1+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_0)_2]-\frac{1}{2\sqrt{4\pi\rho_0}}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2].\tag{30}$$

显然,这种情况下旋转间断是稳定的. 这个结论与文献[8]一致.

(2) 若扰动后间断面不再保持为旋转间断,即在 $x=0$ 处 $[\hat{\rho}]\neq 0$. 那么由方程 (27)—(29)式得到下列边界条件

$$[\hat{b}_x]=0,\quad \text{在 } x=0 \text{ 处},$$

$$[\rho_0V_xa_x+\Phi]=0,\ \text{或}\ [\rho_0V_x\hat{u}+\Phi]=0,\ \text{在 } x=0 \text{ 处}.\tag{31}$$

方程 (31) 式保证了在经受扰动后间断面上磁场法向分量和动量流密度的法向分量的连续性. 应用这些边界条件,可以导出色散关系和旋转间断的不稳定性条件.

利用方程(21)式,可将方程(12)式改写为

$$\frac{d\hat{b}_x}{dx}-\frac{\alpha^*}{2V_x}\hat{b}_x=\frac{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)}{2V_x}a_x+\frac{B_x}{2V_x}\frac{da_x}{dx},\tag{32}$$

式中

$$\alpha^*=i\omega^*-\frac{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)}{\sqrt{4\pi\rho_0}}.\tag{33}$$

为了数学上简单起见,仅考察方程(32)中 $\hat{b}_x$ 的特解. 由于 $x\to\pm\infty$ 处 $\hat{b}_x$ 必须有限,则得

$$\hat{b}_x=\begin{cases}\dfrac{kA_1[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1+kB_x]}{\alpha\rho_0(2kV_x-\alpha_1^*)}e^{kx}, & (-\infty<x\leqslant 0),\\ \dfrac{kA_2[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2-kB_x]}{\alpha\rho_0(2kV_x+\alpha_2^*)}e^{-kx}, & (0\leqslant x<\infty).\end{cases}\tag{34}$$

将方程(24)、(25)和(34)式代入边界条件(31)式，我们得到下列色散关系

$$i\alpha^2[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2]+\alpha\left\{2k^2B_xV_x+\frac{4}{\sqrt{4\pi\rho_0}}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2\right.$$

$$\left.+i3kV_x[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2]\right\}=0. \tag{35}$$

注意到 $\alpha\neq 0$。因此，若将波数 k 视为实数，而角频率 $\omega=\omega_r+i\omega_i$，则由方程(35)得到

$$\omega_r=\frac{2[k^2B_x^2+2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2]}{\sqrt{4\pi\rho_0}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2]}$$

$$+\left[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_0)-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\right]_{1\text{或}2} \tag{36}$$

和

$$\omega_i=\frac{3kB_x[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2]}{\sqrt{4\pi\rho_0}\,[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2]}. \tag{37}$$

若 $\omega_i>0$，这种旋转间断就是不稳定的。如果选取合适的坐标系，使 $B_x>0$（而 k 总是大于零的），则不稳定性条件可以表达为

$$\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2}{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2}>0. \tag{38}$$

进一步可以看出，若 $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1>0$，则方程(38)要求 $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1>\pm(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2$，或 $|(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1|>|(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2|$（另一种可能性不成立）。若 $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1<0$，则方程(38)要求 $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1<\pm(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2$，或 $|(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1|>|(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2|$（另一种可能性也不成立）。若 $|(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1|\leqslant|(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2|$，旋转间断将是稳定的。在所讨论的模式中，磁流体力学旋转间断不稳定性的必要条件为

$$|(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_1|>|(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0)_2|,\quad(\text{当 } B_x>0). \tag{39}$$

以上我们证明了在不可压缩、理想导电、完全电离的等离子体中，旋转间断并不总是稳定的，并在特解情况下得到如方程(39)所示的不稳定性条件。更为普遍条件下旋转间断的稳定性及其在空间等离子体物理中的应用，我们将另文讨论。

参 考 文 献

[1] Sonnerup, B. U. O., in *Dynamics of the Magnetosphere* (Ed. Akasofu, S. I.), D. Reidel, Mass., 1979.

[2] Lee, L. C. and Kan, J. R., *JGR*, **84**(1979), 6417.

[3] Lee, L. C., Albano, R. K. and Kan, J. R., *JGR*, **86**(1981), 54.

[4] Pu, Z. Y. and Kivelson, M. G., *JGR*, **88**(1983), 841.

[5] Paschmann, G. et al., *Nature*, **282** (1979), 243.

[6] Berchem, J. and Russell, C. T., *JGR*, **87**(1982), 8139.

[7] Lee, L. C. and Kan, J. R., *JGR*, **87**(1982), 139.

[8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Электродинамика Сплощних Сред*, Наука, Москва, 1982, §71.