参 考 文 献

1 Kawasaki A, Watanabe R. Fabrication processes of functionally graded materials. Bulletin of the Japan Institute of Metals, 1997, 36(1): 55~61

2 Lee W Y, Stinton D P, Berndt C C, et al. Concept of functionally graded materials for advanced Thermal barrier coating applications. J Am Ceram Soc, 1996, 79(12): 3 003~3 012

(1997-05-24 收稿, 1997-11-07 收修改稿)

复杂河段水质模型有限单元法的网格确定方法

杨春平 钟袁元 曾光明

(湖南大学环境工程系, 长沙 410082)

摘要 研究了根据污染物在单元网格内的分布特征来确定河流水质模型有限单元法中单元网格的划分方法. 在给定网格长度的条件下, 结合河流水质模型有限单元法理论, 提出了根据污染源下游网格长度内污染物完成横向混合所需最大距离作为污染源侧近河岸单元网格的最大宽度, 并结合河流单宽流量估算方法来确定河流最小流带数的方法, 从而可利用河道地形图和已有的方法进行河流水质单元网格的划分和河流水质有限单元法的数值计算. 灵敏度分析表明, 该方法确定的最小流带数受河宽和网格长度的影响较小, 受污染物横向混合程度的影响在可接受的范围内, 方法的稳定性较好. 应用本文建立的方法进行复杂河段水质模型有限单元法数值计算, 可以避免单元网格划分的随意性和盲目性, 可以在满足精度要求的前提下减小计算工作量, 并解决了单元网格的确定需要依靠经验判断的难题.

关键词 **河流 水质模型 有限单元法 数值计算 单元网格**

1 问题的提出

污染物排入河流后, 在水流流场均匀稳定的情况下, 采用河流水质模型的解析解可以方便地模拟污染物在河流中的分布. 但是在多数情况下水污染源的产生地是城镇, 而大多数依水而筑的城镇, 其河道形状往往很不规则, 河段复杂, 有时还伴有河道的分汊现象. 因此模拟和预测这样河流的水质时, 不宜采用简化的解析模型求解, 而应采用数值方法求解[1, 2].

复杂河段二维浅水水质模型可采用正交曲线坐标系统下的有限单元法求解. 对每个单元网格建立质量平衡方程, 即可得到污染物在河流中的浓度分布[1]:

$$L = G^{-1} W^L, \tag{1}$$

式中 L 和 W^L 均为 $n \times m$ 行 1 列的矩阵; $L = (L_{11} L_{12} \cdots L_{1m} L_{21} L_{22} \cdots L_{ij} \cdots L_{nm})^T$, L_{ij} 是由第 ij 单元中污染物的浓度; $W^L = (W^L_{11} W^L_{12} \cdots W^L_{1m} W^L_{21} W^L_{22} \cdots W^L_{ij} \cdots W^L_{nm})^T$, W^L_{ij} 是由系统外单位时间内输入第 ij 单元的该污染物量, 即源强; m 是 y 方向流带的数目; n 是 x 方向河流断面的数目; G^{-1} 是 $m \times n$ 阶方阵, 称为二维河流的 BOD 响应矩阵. 类似地, 可得到二维河流中的 DO 分布[1].

上述计算中, 单元网格的划分是在估算河流断面上单宽流量的基础上, 基于经验知识选

择流带数，结合累积流量分布曲线来确定流带的宽度．网格的长度也需根据经验选择．

单宽流量是由下式估算的：

$$q = a\left|\frac{z}{H}\right|^{b}\frac{Q}{B}, \tag{2}$$

式中 q 为河流断面上某一单位宽度上的流量；H 为河流断面的平均深度；z 为断面上某点在 z 方向（垂直向下方向）的深度；Q 为河流流量；B 为河流断面的水面宽度．文献[1]给出了参数 a, b 的取值范围．

可见，采用有限单元法计算二维河流污染物浓度分布，存在的主要问题是单元网格大小的确定存在随意性，需要结合经验来确定．这样就可能既不必要地增加计算工作量，又影响到计算结果的准确性和可比性．

2　单元网格的确定方法

有限单元法的基本假设是在任意一个单元网格内污染物的浓度是分布均匀的，从而可在每一个单元网格内建立质量平衡方程，求解方程组即可得到污染物的浓度分布．也就是说，有限单元法是将一个不均匀的流场离散成一系列的单元网格，而每个单元网格均可近似作为一个均匀流场来模拟[1]，在单元网格的划分时应充分考虑这一基本假设．

根据上述思路，可以提出以下单元网格划分的准则：在任意一个单元网格内，假设污染源由单元网格上游边界的点 O 进入网格（见图 1），则至少应该在污染物到达下游边界时完成横向混合．

可以假设：（1）当单元网格下游边界污染物浓度最低点 B 的浓度增量 $c(L_{11}, B_{11})$ 与其最高点 C 的浓度增量 $c(L_{11}, 0)$ 之比等于 δ 时，可以认为污染物在该网格断面上完成了横向混合（本文条件下，推荐取 $\delta = 0.80$．推荐的比值较低是考虑到污染源的下游网格内污染物浓度受对岸的反射的影响很小）；（2）在单元网格内不考虑河流水深方向污染物浓度的变化；（3）只考虑单元网格所在河岸的反射，不考虑远离网格的河流对岸的反射；（4）考虑河岸反射时将河岸简化为垂直平面处理，而在计算靠近河岸的网格流带的流量时，河底形状是对数曲线．

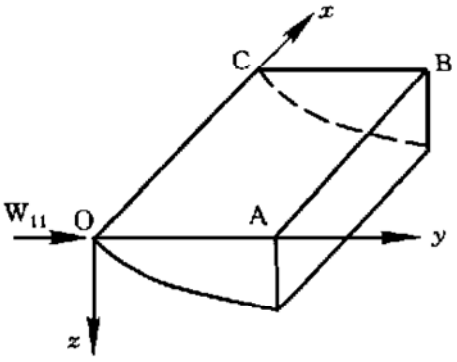


图 1　污染源下游单元网格示意图

根据以上假设条件，可利用污染源边界排放的二维模型得到[1]：

$$c(L_{11}, B_{11}) = \frac{2W_{11}}{u_{11,x}H_{11}\sqrt{4\pi D_{11,y}L_{11}/u_{11,x}}}\exp\left|-\frac{u_{11,x}B_{11}^{2}}{4D_{11,y}L_{11}}\right|\exp\left|-\frac{K_{11}L_{11}}{u_{11,x}}\right|, \tag{3}$$

$$c(L_{11}, 0) = \frac{2W_{11}}{u_{11,x}H_{11}\sqrt{4\pi D_{11,y}L_{11}/u_{11,x}}}\exp\left|-\frac{K_{11}L_{11}}{u_{11,x}}\right|, \tag{4}$$

式中 W_{11} 为岸边排放进入该污染源下游单元网格（$i=1$, $j=1$）的污染源源强；c 为由于污染源 W_{11} 的排放而导致的污染物浓度的增量；L_{11} 为污染物到达该单元网格对岸所需 x 方向单元网格距离；B_{11} 为 x 方向该单元网格宽度；$u_{11,x}$ 为该单元网格 x 方向河流平均流速；H_{11} 为在该单元网格断面上的河水平均深度；$D_{11,y}$ 为在该单元网格内的河流横向弥散系数；K_{11} 为污染物在该单元网格内的衰减速度常数．

当 $c(L_{11}, B_{11})/c(L_{11}, 0) = \delta$ 时，可得到完成横向混合所需的最大距离为

$$L_{11,\max} = -\frac{u_{11,x}B_{11}^2}{4\ln\delta D_{11,y}}, \tag{5}$$

因此，划分单元网格时，对于给定的网格长度 L_{11}，网格宽度应满足以下条件：

$$B_{11,\max} = \sqrt{-\frac{4\ln\delta L_{11}D_{11,y}}{u_{11,x}}}. \tag{6}$$

根据假设(4)，有

$$z = k\ln(y+1), \tag{7}$$

式中参数 k 为比例常数.

参数 k 的辨识：可以根据河流断面的平均深度 H 估计. 一般情况下，近河岸处河流深度较小，而河流中心深度较大，可以假设在距河岸 B_{11} 处的河深 z 为平均深度 H，则参数 k 可按下式计算：

$$k = H/\ln(B_{11}+1). \tag{8}$$

根据式(2)及式(7)，(8)，可得到宽度为 B_{11} 近岸流带对应的流量为

$$Q_1 = \int_0^{B_{11}} a\left|\frac{\ln(y+1)}{\ln(B_{11}+1)}\right|^b \frac{Q}{B}\mathrm{d}y = \frac{aQ}{B[\ln(B_{11}+1)]^b}\int_0^{B_{11}}[\ln(y+1)]^b\mathrm{d}y, \tag{9}$$

式中 $\int_0^{B_{11}}[\ln(y+1)]^b\mathrm{d}y$ 按数值积分方法计算.

根据流带划分时等流量的原则，可得到流带的最小数 n 为

$$n = \frac{Q}{Q_1}, \tag{10}$$

因此，可根据式(6)，(10)确定划分的流带数目. 式(6)中 L_{11} 根据所要求的计算精度给定；在研究的计算条件下，令 $D_{11,y} = D_y$；平均流速 $u_{11,x}$ 则由下式计算：

$$u_{11,x} = \frac{Q_1}{B_{11}H_{11}}. \tag{11}$$

研究的单元网格的平均深度 H_{11} 可按下式估算：

$$H_{11} = \frac{\int_0^{B_{11}} k\ln(y+1)\,\mathrm{d}y}{B_{11}}, \tag{12}$$

$$H_{11} = \frac{H[\ln(B_{11}+1)(B_{11}+1) - B_{11}]}{B_{11}\ln(B_{11}+1)}. \tag{13}$$

结合式(6)，(11)及式(13)可得

$$B_{11,\max} = \sqrt{-\frac{4\ln\delta L_{11}D_yH[\ln(B_{11}+1)(B_{11}+1) - B_{11}]}{Q_1\ln(B_{11}+1)}}, \tag{14}$$

取 δ 的推荐值 $\delta = 0.8$，代入上式可得

$$B_{11,\max} = \sqrt{\frac{0.893L_{11}D_yH[\ln(B_{11}+1)(B_{11}+1) - B_{11}]}{Q_1\ln(B_{11}+1)}}. \tag{15}$$

因此，根据水质模型计算所需的精度选择网格的长度 L_{11}，采用试差法由式(9)和式(15)

计算出各个污染源排放口下游的网格宽度的最大值 $B_{11,\max}$ 和相应的 Q_1，并由式(10)计算出划分的流带数 n．然后按照式(2)确定计算河段其他流带中网格的宽度，最后根据式(1)计算各个网格中污染物的浓度值，即可得到满足精度要求的污染物浓度场.

3 应用研究

湘江衡阳市区下游的大源渡正建设一个航运枢纽，以充分发挥湘江在航运、发电等方面的综合效益．枢纽建设对湘江衡阳市区段水质的影响，受到各方高度关注．考虑到该河段的情况，宜采用水质模型有限单元法来预测水质的变化.

该河段铜桥港排污口是上游最大的排污口，其断面的有关参数为：枢纽建成后枯水期最小流量 $Q=191\ m^3\cdot s^{-1}$，水位 50 m，断面平均深度 $H=6.33$ m，断面宽度 $B=450$ m；取 $a=0.92$，$b=1.75$，$\delta=0.80$，网格长度 $L_{11}=100$ m．按上述方法，容易求得，在网格均匀划分时，应划分的网格数为 53 个，每个网格内的流量 $Q_{11}=3.60\ m^3\cdot s^{-1}$．实际计算时，河流近岸处污染物浓度梯度大，网格划分需严格按照求得所需网格数；而断面中心的网格可按倍增后的流量来划分．这样既可满足精确度的要求，又可降低计算工作量，降低对计算机内存的要求.

为了进一步确定上述方法的稳定性，现考察依据上述方法确定的流带数 n 对参数 δ、河宽 B 及网格长度 L_{11} 的灵敏度 S．由于难以得到灵敏度的解析式，仅在上述计算条件下，考察单一参数改变后的计算结果(见表 1)．

表 1 参数 δ、河宽 B 和网格长度 L_{11}(单位：m)

δ	n	S	B	n	S	L_{11}	n	S
0.70	41	1.81	350	48	0.424	50	78	−0.943
0.90	80	4.08	450	59	0.509	150	43	−0.377

可见，上述方法的灵敏度较低，计算范围内除 δ 对 n 的灵敏度较大以外，其余情况下灵敏度 S 的绝对值小于 1．但即使 $\delta=0.9$ 时其灵敏度 S 的值也可接受，而 δ 取更大值的余地已很小，也无必要．特别是方法中唯一需要结合经验确定的网格长度对 n 的影响程度较小，可见对经验知识的要求低．所以，上述方法的稳定性较好，可靠性较高.

4 结语

本文根据污染源下游单元网格内污染物的分布特征，来确定河流水质模型的有限单元法网格划分的方法，解决了复杂河段有限单元法网格确定需要依靠经验判断的难题．与现有水质模型有限单元法的网格划分方法相比，本文推荐的方法既可以避免凭经验确定流带数的随意性和盲目性，也可以避免迭代法计算及其利用网格间浓度差别进行判断时的不连续性，简化了计算过程，同时提高了计算结果的精确度和可比性.

致谢 作者感谢周定教授的鼓励．本工作为机械工业部教育司科技基金(批准号：95251313)资助项目.

参 考 文 献

1 程声通，陈毓龄．环境系统分析．北京：高等教育出版社，1990．38~ 43，69~ 74

2 杨春平，袁兴中，曾光明，等．二维弯曲分汊河流水质数值计算．湖南大学学报(自然科学版)，1995，22(2)：38~ 43

(1997-04-08 收稿，1997-09-05 收修改稿)