科 学 通 报
第 42 卷 第 5 期 Chinese Science Bulletin 1997 年 3 月

【研究简报】

AR 箭图一类连通分支中的几乎分裂序列

姚海楼① 平艳茹②
(①中国科学院数学研究所，北京 100080；②河北大学经济学院，保定 071002)

关键词 几乎分裂序列 平凡赋值 连通分支 投射-内射模

设 A 是代数闭域 F 上一个有限维基连通代数，mod$A$ 为有限维右 A -模范畴，Γ_A 为代数 A 的 AR 箭图. 由于 mod$A$ 中成立 Krull－Schmidt 定理，通常将 mod$A$ 中模与它的同构类看作一回事. Auslander 和 Reiten 在研究 Artin 代数的表示理论时，引进了几乎分裂序列和既约映射的概念[1~4]. 今天，几乎分裂序列理论已成为代数表示论的一大基石. 令

$$0 \to X \to \oplus_{i=1}^{r} Y_i \to Z \to 0$$

是 mod$A$ 中的几乎分裂序列，其中 Y_i 是不可分解的，则数 r 刻画了 mod$A$ 中始于 X 且止于 Z 的映射的复杂程度. 因此，研究几乎分裂序列中间项的不可分解直和项的个数是很有意义的. Bautista 和 Brenner[5]证明了如果 A 是有限表示型的，则 mod$A$ 中几乎分裂序列中间项至多有 4 个不可分解模，当中间项有 4 个不可分解模时，必有一个是投射-内射模. Liu[6]将此定理推广到非正则模的几乎分裂序列上. 本文研究的 mod$A$ 中几乎分裂序列出现在 AR 箭图中满足如下条件的无限连通分支 Γ 里：

(*) Γ 中模均非右稳定，Γ 的左稳定部分 Γ_{ls} 是连通的且有方向圈.

由文献[7]中结果知，这样的分支 Γ 是仅含有限多个 DT_r 轨道的无限连通分支. 下面介绍一些必要的概念与术语.

本文始终假设 F 是代数闭域，A 是 F 上基连通无限表示型的有限维代数，mod$A$ 是有限维右 A-模范畴，Γ_A 是 A 的 AR 箭图，Γ 是 Γ_A 的连通分支，用 τ 和 τ^- 分别记 Auslander-Reiten 变换 DT_r 和 T_rD . 当没有混淆的可能时，不区别 mod$A$ 中的不可分解模 X 和 Γ_A 中对应的顶点 $[X]$.

令 $X \to Y$ 是 Γ_A 中一个箭向，它在 Γ_A 中的赋值(d_{XY}, d'_{XY})定义为，d_{XY} 为 Y 在 X 的 source 映射的象域的不可分解直和项中出现的次数，而 d'_{XY} 为 X 在 Y 的 Sink 映射的原象域的不可分解直和项中出现的次数. 如果 $d_{XY} = d'_{XY} = 1$，就说箭向 $X \to Y$ 具有平凡赋值. 如果 Γ_A 的子箭图 Γ 中每个箭向都有平凡赋值，就说 Γ 具有平凡赋值.

设 X 是 mod$A$ 中的不可分解模，说 X 是左稳定的，如果对所有正整数 n，$\tau^n X \neq 0$；说 X 是右稳定的，如果对所有的负整数 n，$\tau^n X \neq 0$. 在 Γ_A 中去掉投射模所在 τ -轨道剩下部分记为 ${}_l\Gamma_A$，${}_l\Gamma_A$ 的连通分支称为 Γ_A 的左稳定分支. 右稳定分支可对偶地定义.

其他未交待的概念和术语见文献[8]. 下面是要用到的几个引理.

引理 1[7] 设 Γ 是 Γ_A 的左稳定分支，不含有 τ -周期模，如果 Γ 中有方向圈，则 Γ 不是 Γ_A 的稳定分支. 进一步，Γ 仅含有限多个 τ -轨道，且有平凡赋值，Γ 中每个模至多有两个直接前趋元.

引理 2[6] 设 Γ 是 Γ_A 的任意一个连通分支，令 $0 \to X \to \oplus_{i=1}^{r} Y_i \to Z \to 0$ 是 mod$A$ 中几乎分裂序列，如果 X 有投射前趋元，Z 有内射后继元，则 $r \leqslant 4$，且 $r = 4$ 时，诸 Y_i 中有一

个是投射-内射模.

引理 3[6]　令 X 是 mod$A$ 中一个不可分解模,使得在 Γ_A 中 X 到一个内射模有一个 sectional 路，假设 f，$X \to \oplus_{i=1}^{r} Y_i$ 是一个 source 映射，诸 Y_i 不可分解，如果 $r > 4$ 或 $r = 4$ 且诸 Y_i 均非投射模，则 X 没有投射前趋元，且不在 Γ_A 中的任何方向圈中.

为叙述方便，记代数 A 的 AR 箭图 Γ_A 中满足条件($*$)的连通分支为 Γ_*.

定理 1　设 X 是 Γ_* 中的内射模,且 $X \to \oplus_{i=1}^{r} Y_i$ 是 source 映射，诸 Y_i 是不可分解模,则 $r \leqslant 3$.

证　显然，诸 Y_i 均不是投射模.

若 X 是左稳定模，$r \geqslant 4$，则由引理 1，诸 Y_i 中至多有 2 个是左稳定的.因此，X 一定有投射前趋元，这与引理 3 矛盾. 故 $r \leqslant 3$.

若 X 是非左稳定的，当 X 不是投射-内射模时，则有几乎分裂序列

$$0 \to \tau X \to (\oplus_{i=1}^{r} \tau Y_i) \oplus M \to X \to 0.$$

因 X 是非左稳定的，故 X 有投射前趋元，由引理 2 知 $r \leqslant 4$.但 $r = 4$ 时，上面这个几乎分裂序列中间项有一个不可分解模是投射-内射模，因 X 是内射模,这不可能，故 $r \leqslant 3$.

当 X 是投射-内射模时，显然 $X/\operatorname{soc}X$ 是不可分解的，此处 $\operatorname{soc}X$ 是 X 的基座，故此时 $r = 1 < 3$. 证毕.

定理 2　设 $0 \to X \to \oplus_{i=1}^{r} Y_i \to Z \to 0$ 是出现在 Γ_* 中的几乎分裂序列，即 X，Y_i，Z 均是 Γ_* 中模，则 $r \leqslant 4$，当 $r = 4$ 时,有一个 Y_i 是投射-内射模.

证　当 X 是非左稳定模时，由引理 2 知本定理结论成立.

当 X 是左稳定模时，则 Z 也是左稳定模，如果诸 Y_i 中没有一个是投射的，由引理 1，诸 Y_i 中至多有 2 个是左稳定的，不妨设为 Y_1, Y_2 . 若 $r \geqslant 3$，不妨设 Y_3 是非投射的非左稳定元，于是必存在自然数 $n(n > 1)$ 使 $\tau^n Y_3$ 是投射的，从而 X 有投射前趋元，由引理 2 知本定理结论成立.

如果诸 Y_i 中有一个是投射的，则此时其他 Y_j ($j \neq i$)均非内射的，不妨设 Y_3 是投射的，进一步可假定 Y_3 不是投射-内射的(否则由引理 3 知定理结论成立),于是若 Z 不是内射的，有几乎分裂序列

$$0 \to Z \to (\oplus_{i=1}^{r} \tau^- Y_i) \oplus (\oplus_{i=1}^{s} M_i) \to \tau^- Z \to 0.$$

这里 $M_i \in \Gamma_*$，故 Z 有投射前趋元，从而由引理 2 知本定理成立.

若 Z 是内射的，则有 source 映射 $Z \to \oplus_{i=1}^{r} \tau^- Y_i$，由定理 1 知 $r \leqslant 3 < 4$. 证毕.

定理 3　分支 Γ_* 具有平凡赋值.

证　设 $X \to Y$ 是 Γ_* 中一个箭向，当 X 与 Y 均是左稳定模时，由引理 1 知，箭向 $X \to Y$ 具有平凡赋值.

当 X 与 Y 中有一个是非左稳定模时，不妨设 X 是非左稳定的，(d, d') 是箭向 $X \to Y$ 的赋值，由于 F 是代数闭域，故 $d = d'$. 若 $d = d' \geqslant 2$，由于从 X 到 Y 的既约映射或是满的，或是单的，故或 $\dim_F X > \dim_F Y$，或 $\dim_F X < \dim_F Y$.

如果 $\dim_F X > \dim_F Y$，则 Y 不是投射的(否则，X 到 Y 的既约映射是单的)，于是 τY 存在，从而有几乎分裂序列 $0 \to \tau Y \to X \oplus X_0 \to Y \to 0$. 因 $d \geqslant 2$，故 X 是 X_0 的直和项，从而 $\dim_F \tau Y \geqslant 2\dim_F X - \dim_F Y > \dim_F X$. 故 X 也不是投射模. 于是 τX 存在，且 $\tau Y \to X$ 的

科 学 通 报
第42卷 第5期 Chinese Science Bulletin 1997年3月

【研究简报】

非线性不适定问题带闭线性算子的 Tikhonov 正则化

杨宏奇 侯宗义
(复旦大学数学研究所，上海 200433)

关键词 非线性不适定问题 x^*-极小半范最小二乘解 Tikhonov 正则化

考虑非线性问题

$$F(x) = y_0, \tag{1}$$

这里 F: $\mathrm{dom}F \subset X \to Y$ 是一个从 Hilbert 空间 X 到 Hilbert 空间 Y 的非线性算子，方程(1)一般是不适定的，需用正则化方法求解，对此已有不少文献作过研究[1~6]. 本文用带闭算子 D 的 Tikhonov 正则化方法来研究方程(1). 这里 D: $\mathrm{dom}D \subset X \to Z$ 为一闭线性算子，Z 为 Hilbert 空间. 关于算子对(F, D)，在下面的讨论中，类似于文献[4]，假设：

赋值也是 (d, d)，从而有几乎分裂序列

$$0 \to \tau X \to \tau Y \oplus Y_1 \to X \to 0.$$

因 $d \geqslant 2$，τY 是 Y_1 的一个直和项，故 $\dim_F \tau X \geqslant 2\dim_F \tau Y - \dim_F X > \dim_F \tau Y$. 因此，从 τX 到 τY 的既约映射是满的，即 τY 不是投射模，依次下去就有

$$\cdots \to \tau^2 X \to \tau^2 Y \to \tau X \to \tau Y \to X \to Y.$$

即 X 与 Y 均是左稳定的，矛盾.

对于 $\dim_F X < \dim_F Y$，可对偶地证明 X 与 Y 均是右稳定的，但这也不可能. 故 $d = d' = 1$. 即箭向 $X \to Y$ 具有平凡赋值. 证毕.

注 当 Γ_A 的无限连通分支 Γ 中元均非左稳定，且 Γ 的右稳定部分 Γ_{rs} 是连通的且有方向圈，则定理2和定理3的结论也成立，并且定理1的对偶成立.

致谢 衷心感谢刘绍学教授的指导与鼓励及讨论班同学的讨论.

参 考 文 献

1 Auslander M, Reiten I. Representation theory of Artin algebras Ⅲ. Comm Algebra, 1975, 3: 239~294
2 Auslander M, Reiten I. Representation theory of Artin algebras Ⅳ. Comm Algebra, 1977, 5: 443~518
3 Auslander M, Reiten I. Representation theory of Artin algebras Ⅴ. Comm Algebra, 1977, 5: 519~554
4 Auslander M, Reiten I. Representation theory of Artin algebras Ⅵ. Comm Algebra, 1978, 6: 257~300
5 Bautista R, Brenner S. On the number of terms in the middle of an almost split sequence. Springer Lecture Notes in Math, 1981, 903: 1~8
6 Liu S. Almost split sequences for non-regular modules. Fund Math, 1993, 143: 183~190
7 Liu S. Semi-stable components of an Auslander-Reiten quiver. J London Math Soc, 1993, 47: 405~416
8 Ringel C M. Tame algebras and integral quadratic forms. Lecture Notes in Math, 1099, Berlin: Springer-Verlag, 1984

(1996-04-26 收稿)