科学通报
第40卷 第9期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1995年5月

各向异性介质中地震波射线满足的改进型斯涅尔定律*

张中杰 滕吉文 张霖斌 杨顶辉
(中国科学院地球物理研究所,北京 100101)

关键词 各向异性 地震波 界面 几何射线参数 改进型斯涅尔定律

各类介质中地震波遇界面时几何射线参数求取问题均涉及到斯涅尔定律的应用,各向同性介质中斯涅尔定律的应用已广为人知. 由于各向异性介质中地震波相速度与射线速度即能速度强度和方向上的差异[1],故基于相速度所获得的经典斯涅尔关系式不适于求解各向异性介质中地震波遇界面时的几何射线参数,经典的斯涅尔定律需要修正. 这对利用各向异性介质中地震波动射线理论,在研究地球科学中的有关问题具有重要的价值. 然而,迄今尚未见到这方面的成果报道. 为此,本文从各向异性介质中地震波前面满足的偏微分方程出发,以特征线法进行研究,获得了横向各向同性、椭圆各向异性以及立方体各向异性介质中地震射线遇界面时所遵循的改进型斯涅尔定律.

1 各向异性介质中波前面偏微分方程

二维横向各向同性介质中,qP,qSV 和 qSH 波前面的偏微分方程分别为[2]

$$\frac{1}{2}\left\{(A_{11}+A_{55})\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+(A_{33}+A_{55})\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\pm\left[(A_{11}-A_{55})^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^4+(A_{33}-A_{55})^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^4\right.\right.$$
$$\left.\left.+2(A_{55}^2+A_{11}A_{55}+A_{33}A_{55}-A_{11}A_{33}+4A_{13}^2+2A_{13}A_{55})\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}\right\}=1, \tag{1}$$

$$A_{55}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+A_{66}\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2=1, \tag{2}$$

(1)式中"+"号对应于 qP 波,"−"号对应于 qSV 波,(2)式对应于 qSH 波. $A_{ij}=(C_{ij}/\rho)$, C_{ij} $(i,j=1,\cdots\cdots 6)$ 是弹性常数,$\tau(x,y,z)$ 是描述波前面的时间函数.

对于二维椭圆各向异性介质有:

$$A_{11}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+A_{33}\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2=1 \qquad \text{对应于 } qP \text{ 波,} \tag{3}$$

$$A_{55}\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\right]=1 \qquad \text{对应于 } qSV \text{ 波,} \tag{4}$$

1994-08-31 收稿,1994-12-27 收修改稿
*国家自然科学基金和中国科学院青年基金资助项目

$$A_{55}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+A_{66}\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2=1 \qquad \text{对应于 } qSH \text{ 波,} \tag{5}$$

对于二维立方体各向异性介质有:

$$\frac{1}{2}\left\{(A_{11}+A_{66})\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\right]\pm\left[(A_{11}^2-4A_{11}A_{66})\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^4+(A_{66}^2-4A_1A_{66})\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^4\right.\right.$$

$$\left.\left.+2(A_{11}A_{66}+2A_{12}^2+4A_{12}A_{66}-2A_{11}^2)\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}\right\}=1 \tag{6}$$

与

$$A_{44}\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\right]=1, \tag{7}$$

类似地,(6)式中"+"号对应于 qP 波,"−"号对应于 qSV 波,(7)式对应于 qSH 波.

2　各向异性介质中斯涅尔定律的型式

考虑到

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}=\frac{\sin\theta}{V(\theta)}, \tag{8a}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=\frac{\cos\theta}{V(\theta)}, \tag{8b}$$

式中 $V(\theta)$ 为各向异性介质中 qP、qSV 或 qSH 波传播的法向速度,θ 为波前面与 z 轴夹角,可知:

$$V_p=\{a_1\sin^2\theta+a_2\cos^2\theta+(a_3\sin^4\theta+a_4\cos^4\theta+a_5\sin^2\theta\cos^2\theta)^{1/2}\}^{1/2}, \tag{9a}$$

$$V_{SV}=\{a_1\sin^2\theta+a_2\cos^2\theta-(a_3\sin^4\theta+a_4\cos^4\theta+a_5\sin^2\theta\cos^2\theta)^{1/2}\}^{1/2}, \tag{9b}$$

$$V_{SH}=(A_{44}\sin^2\theta+A_{66}\cos^2\theta)^{1/2}. \tag{9c}$$

其中,对于横向各向同性介质:

$$a_1=(A_{11}+A_{55})/2 \qquad a_2=(A_{33}+A_{55})/2, \tag{10a}$$

$$a_3=(A_{11}-A_{55})^2/4 \qquad a_4=(A_{11}-A_{55})^2/4 \tag{10b}$$

$$a_5=A_{55}^2+A_{11}A_{55}+A_{33}A_{55}-A_{11}A_{53}+4A_{13}+2A_{13}A_{55}/4. \tag{10c}$$

对于立方体各向异性介质:

$$a_1=(A_{11}+A_{66})/2, \qquad a_2=(A_{11}+A_{55})/2, \tag{11a}$$

$$a_3=(A_{11}^2-4A_{11}A_{66})/4, \qquad a_4=(A_{66}^2-4A_{11}A_{66})/4, \tag{11b}$$

$$a_5=(A_{11}A_{66}+2A_{12}^2+4A_{12}A_{66}-2A_{11})/4. \tag{11c}$$

对椭圆各向异性介质:

$$V_P=(A_{11}\sin^2\theta+A_{33}\cos^2\theta)^{1/2}, \tag{12a}$$

$$V_{SV}=(A_{55})^{1/2}, \tag{12b}$$

$$V_{SH}=(A_{55}\sin^2\theta+A_{66}\cos^2\theta)^{1/2}. \tag{12c}$$

对 qP 波偏微分方程(1)式用特征线法求解得:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=\left[a_1+\frac{2a_3\mathrm{tg}^2\theta+a_5}{\sqrt{a_3\mathrm{tg}^4\theta+a_4+a_5\mathrm{tg}^2\theta}}\right]\sin\theta/V_P, \tag{13a}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=\left[a_2+\frac{2a_4+a_5\mathrm{tg}^2\theta}{\sqrt{a_3\mathrm{tg}^4\theta+a_4+a_5\mathrm{tg}^2\theta}}\right]\cos\theta/V_P. \tag{13b}$$

类似地，可以得到 qSV 和 qSH 波对应偏微分方程的解 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

对横向各向同性或立方体各向异性介质，能射线轨迹方向角 ϕ 与传播方向角 θ 关系为:

$$\mathrm{tg}\phi=\frac{a_1D+2a_3\mathrm{tg}^2\theta+a_5}{a_2D+2a_4+a_5\mathrm{tg}^2\theta}\ \mathrm{tg}\theta \qquad \text{对应于 } qP \text{ 波}, \tag{14a}$$

$$\mathrm{tg}\phi=\frac{a_1D-(2a_3\mathrm{tg}^2\theta+a_5)}{a_2D-(2a_4+a_5\mathrm{tg}^2\theta)}\ \mathrm{tg}\theta \qquad \text{对应于 } qSV \text{ 波}, \tag{14b}$$

$$\mathrm{tg}\phi=\frac{A_{44}}{A_{66}}\ \mathrm{tg}\theta \text{ 或 } \mathrm{tg}\phi=\mathrm{tg}\theta \qquad \text{对应于 } qSH \text{ 波}, \tag{14c}$$

式中 $D=(a_3\mathrm{tg}^4\theta+a_5\mathrm{tg}^2\theta+a_4)^{1/2}$.

对椭圆各向异性介质有:

$$\mathrm{tg}\phi=\frac{A_{11}}{A_{33}}\ \mathrm{tg}\theta \qquad \text{对应于 } qP \text{ 波}, \tag{15a}$$

$$\mathrm{tg}\phi=\mathrm{tg}\theta \qquad \text{对应于 } qSV \text{ 波}, \tag{15b}$$

$$\mathrm{tg}\phi=\frac{A_{55}}{A_{66}}\ \mathrm{tg}\theta \qquad \text{对应于 } qSH \text{ 波}. \tag{15c}$$

现先研究横向各向同性介质中 qSH 波满足的改进型斯涅尔定律.

由下式可以得到 qSH 波射线速度

$$C=\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{16}$$

即有

$$\frac{1}{C^2}=\frac{\sin^2\phi}{A_{44}}+\frac{\cos^2\phi}{A_{66}}=\frac{V_{SH}^{Z}}{(A_{44}\sin^2\theta+A_{66}\cos^2\theta)}. \tag{17}$$

由于遇界面时，由相速度满足的斯涅尔定律仍然成立，有

$$\frac{\sin\theta_i}{V_i}=\frac{\sin\theta_j}{V_j}, \tag{18}$$

式中 i 表示入射波前，j 表示反射或透射波前.

结合(17)式与(18)式可以得到横向各向同性介质中修正的 qSH 波所满足的斯涅尔定律:

$$\frac{C_i\sin\theta_i}{V_{SHi}}=\frac{C_j\sin\theta_j}{V_{SHj}}, \tag{19}$$

其中

$$V_{SHi}=\sqrt{A_{66(i)}}\ ,\ V_{SHj}=\sqrt{A_{66(j)}}\ , \tag{19a}$$

$$C_i=A_{66(i)}+A_{44(i)}\mathrm{ctg}^2\phi_i,\ C_j=A_{66(j)}+A_{44(j)}\mathrm{ctg}^2\phi_j. \tag{19b}$$

类似地，我们可以获得 qP 或 qSV 波的改进型斯涅尔定律：

$$\frac{C_i\sin\phi_i}{D_i}=\frac{C_j\sin\phi_j}{D_j}\ , \tag{20}$$

其中 $D_i=a_1^2(i)a_2^2(i),\ D_j=a_1^2(j)a_2^2(j),$ (20a)

$$C_i=\frac{\left\{\left[D\pm\frac{2a_3\mathrm{tg}^2\theta_i+a_5}{a_1}\right]^2+\left[D\pm\frac{2a_4\mathrm{tg}^2\theta_i+a_5\mathrm{tg}^2\theta_i}{a_2}\right]^2\mathrm{ctg}^2\theta_i\right\}^{1/2}\cos^2\phi_i}{\left[\mathrm{tg}^2\theta_i+\frac{a_2\pm D}{a_1}\right]\left[D\pm\frac{2a_4+a_5\mathrm{tg}^2\theta_i}{a_2}\right]^2}. \tag{20b}$$

上式中“+”号对应于 qP 波，“−”号对应于 qSV 波，且 $\mathrm{tg}\theta_i=f(\mathrm{tg}\phi_i)$ 其具体形式可通过(14a, b)式推出，在此不详述.

类似地，可知对于椭圆各向异性介质，改进型斯涅尔定律为

$$\frac{C_i\sin\theta_i}{V_i}=\frac{C_j\sin\theta_j}{V_j}\ . \tag{21}$$

对于 qP 波：$V_i=\sqrt{A_{33(i)}}\ ,\ V_j=\sqrt{A_{33(j)}}\ ,$

$$C_i=A_{33(i)}+A_{11(i)}\mathrm{ctg}^2\phi_i\quad C_j=A_{33(j)}+A_{11(j)}\mathrm{ctg}^2\phi_j, \tag{21a}$$

对于 qSV 波：$V_i=\sqrt{A_{55(i)}}\ ,\ V_j=\sqrt{A_{55(j)}}\ ,$

$$C_i=C_j=1. \tag{21b}$$

对于 qSH 波：$V_i=\sqrt{A_{66(i)}}\ ,\ V_j=\sqrt{A_{66(j)}}\ ,$

$$C_i=A_{66(i)}+A_{44(i)}\mathrm{ctg}^2\phi_i,\ C_j=A_{66(j)}+A_{44(j)}\mathrm{ctg}^2\phi_j. \tag{21c}$$

3　讨论与结语

当各向异性介质蜕化为各向同性介质时，改进型斯涅尔定律变成经典的斯涅尔定律的形式，这是因为各向同性介质中相速度与射线传播速度值等同．各向异性介质中改进型斯涅尔定律说明介质各向异性对界面上地震波传播行为方向性影响强烈，而且非常复杂．值得说明的是，以上研究结果不仅适用于同类特殊各向异性介质中界面上几何射线参数的求取，还可应用于不同类型各向异性中界面上波传播行为的研究．

致谢　本项研究得到中国科学院测量与大地动力学开放实验室的大力支持，特此鸣谢．

参　考　文　献

1　滕吉文．弹性各向异性研究的沿革、现状与问题．地球物理学进展，1992, 7(4): 14～28

2　张中杰．各向异性介质中地震波前面的偏微分方程．地球物理学报，1994, 37(2): 220～227