黑洞热力学第零定律的恰当表述*

赵　峥

(北京师范大学物理系,北京 100875)

关键词　事件视界、同时面、第零定律.

通常认为，黑洞热力学第零定律是指“稳态黑洞视界面上的表面重力 K 是一个常数”[1,2]. 它相应于通常热力学中,处于热平衡的系统各点有相同的温度. 然而,真正的热力学第零定律应该是指“热平衡具有传递性”. 由此可以证明热力学系统存在一个表征热平衡状态的态函数——温度. “处于热平衡的物体,各点有相同的温度”只不过是热力学第零定律的一个推论. 实际上,表征“热平衡具有传递性”的第零定律是自然界中一条普适的定律,不管一个系统是否达到热平衡状态,也不管一个物体各点的温度是否有相同的数值,第零定律总是成立的. 综上所述,把“稳态黑洞事件视界的表面重力 K 为常数”看作黑洞热力学第零定律,是不妥当的,它充其量只能看作该定律在稳态视界上的一个推论.

在文献[3,4]中,我们指出“热平衡的传递性”等价于“坐标钟钟速同步的传递性”. 可以把同时面的存在看作热力学第零定律的强形式,也就是说,第零定律成立的时空区，可以定义统一的坐标时间. 换句话说，第零定律要对时空作出限制，真实的物理时空必须能够建立同时面,这就是说,应当是稳定因果的.

下面就来探讨黑洞热力学第零定律的恰当表述形式. 在文献[5,6]中,我们指出，对于存在 Killing 矢量 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ 和 $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$ 的一般稳态时空，

$$dS^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2 + 2g_{03}dtdz \tag{1}$$

满足零曲面条件

$$n^\mu n_\mu = 0 \tag{2}$$

及非转动类光世界线条件

$$l^a l_a = 0 \tag{3}$$

的超曲面,由

$$\hat{g}_{00} \equiv g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} = 0 \tag{4}$$

决定,其中

$$n_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \qquad (\mu = 0,1,2,3) \tag{5}$$

为超曲面 $f(x^\mu) = 0$ 的法矢量. 而

本文 1991 年 4 月 1 日收到.

* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目.

$$l^a \equiv \frac{dx^\mu}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a = \xi^a + \Omega\psi^a \tag{6}$$

为"局部非转动观测者"世界线的切矢[2]，式中

$$\Omega \equiv \frac{dz}{dt} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \tag{7}$$

为此类观测者的广义拖曳速度．对于这些观测者，线元(1)化成

$$dS^2 = \hat{g}_{00}dt^2 + g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2, \tag{8}$$

相应的参考系是时轴正交的．考虑到(4)式确定的零超曲面上存在坐标奇异性，我们把$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$和$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$推广后分别记作 ξ^a 和 ψ^a．

对于 $g_{03} \neq 0$ 的稳态时空，在 $g_{00} = 0$ 和 $\hat{g}_{00} = 0$ 的相应解之间，存在一个能层区．由于在

$$\xi^a\xi_a = g_{00} = 0 \tag{9}$$

处，ξ^a 类光，而在能层区，$g_{00} > 0$，ξ^a 又类空，所以在上述区域不存在静止观测者．注意到因果线应满足

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \leqslant 0, \tag{10}$$

对于类时世界线，τ 为固有时间；对于类光测地线，τ 为仿射参量．考虑无 x、y 方向运动的粒子，(10)式取等号时的解为

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-g_{03} \pm \sqrt{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}}{g_{33}}. \tag{11}$$

这表明，因果性要求能层中的粒子不可能静止，必须以速度 $\frac{dz}{dt}$ 作拖曳运动，此速度的取值范围应在下述区间：

$$\frac{-g_{03} - \sqrt{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}}{g_{33}} \leqslant \frac{dz}{dt} \leqslant \frac{-g_{03} + \sqrt{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}}{g_{33}}. \tag{12}$$

因为

$$\hat{g}_{00} = \frac{1}{g_{33}}(g_{00}g_{33} - g_{03}^2), \tag{13}$$

所以在 $\hat{g}_{00} = 0$ 的超曲面上，任何粒子都只能以唯一确定的拖曳速度

$$\Omega_H = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{g_{00}=0} = \left.-\frac{g_{03}}{g_{33}}\right|_{\hat{g}_{00}=0} \tag{14}$$

运动．而以 Ω_H 拖曳的坐标系，是时轴正交系在该零超曲面上的类光极限．也就是说，l^a 在其上是超曲面正交的．我们称(4)式决定的零超曲面为局部事件视界，以区别于用整体技术定义的事件视界．

下面来证明 Ω_H 在 $\hat{g}_{00} = 0$ 所决定的局部视界上是一个常数．从(4)和(14)式可知，在局部视界上，

$$\Omega_H = -\frac{g_{03}}{g_{33}} = -\frac{g_{00}}{g_{03}}. \tag{15}$$

在这个超曲面上，沿任一方向 x^μ 求 Ω_H 的偏导数：

$$\Omega'_{\mathrm{H}} \equiv \frac{\partial \Omega_{\mathrm{H}}}{\partial x^{\mu}}, \tag{16}$$

得

$$\Omega'_{\mathrm{H}} = \frac{-1}{g_{33}}(g'_{03} + \Omega_{\mathrm{H}} g'_{33}) \tag{17}$$

或

$$\Omega'_{\mathrm{H}} = -\frac{1}{g_{03}}(g'_{00} + \Omega_{\mathrm{H}} g'_{03}). \tag{18}$$

又从(17)与(18)式可得

$$g'_{33}\Omega_{\mathrm{H}}^2 + 2g'_{03}\Omega_{\mathrm{H}} + g'_{00} = 0, \tag{19}$$

解为

$$\Omega_{\mathrm{H}} = \frac{-g'_{03} \pm \sqrt{(g'_{03})^2 - g'_{00}g'_{33}}}{g'_{33}}. \tag{20}$$

从(15)式可知，Ω_{H} 是唯一确定的实函数，故(20)式必有

$$(g'_{03})^2 = g'_{00}g'_{33}, \tag{21}$$

即

$$\Omega_{\mathrm{H}} = \frac{-g'_{03}}{g'_{33}}, \tag{22}$$

代入(17)与(18)式均可得

$$\Omega'_{\mathrm{H}} = 0. \tag{23}$$

故 Ω_{H} 在局部视界上是一个常数.

由于 Killing 矢量的线性迭加仍是 Killing 矢量，从(6)式可知，在上述局部视界上，类光矢量

$$l^a = \xi^a + \Omega_{\mathrm{H}}\phi^a \tag{24}$$

是 Killing 矢量. 因此，这个局部视界是一个 Killing 视界[7]. 虽然此视界不是用整体技术定义的，但可用许多方法证明，它有 Hawking 热效应[5,8].

$$l^a\nabla_a l^b = -\mathrm{K}l^b, \tag{25}$$

可在 Killing 视界上定义一个标量 K. 在数学上它是群参量 v 对仿射参量 λ 的偏离:

$$\frac{d\lambda}{dv} \propto e^{\mathrm{K}v}. \tag{26}$$

在物理上它是相对于视界静止的物体，在趋近于视界时的重正化的重力加速度. 它等于该物体的固有加速度与红移因子的乘积[1,2]. 可以证明[5]

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{2}\lim_{\hat{g}_{00}\to 0}\sqrt{\frac{-g^{11}}{\hat{g}_{00}}}\,\hat{g}'_{00} \tag{27}$$

求导沿视界二维类空截面的法矢方向. 众所周知，K 决定事件视界的温度，$T = \frac{\mathrm{K}}{2\pi\mathrm{K_B}}$. 已经证明，对于稳态 Killing 视界的连通分支，不存在沿视界面的宏观能量-动量流动，所以 K 是一个常数[1,2,7].

综上所述，位于局部视界面上的任何粒子，都必须以唯一确定的拖曳速度 Ω_{H} 运动(因而视界本身被看作以速度 Ω_{H} 作拖曳运动)，相应的拖曳系是时轴正交系的类光极限. 或者说，

位于局部视界上的粒子的世界线(切矢为 l^a),是超曲面正交的类光测地线。在世界线类时的情况下,时轴正交保证了同时面的存在,也即保证了热力学第零定律成立[3,4]。因此,我们认为,"事件视界是同时面的类光极限",或者说"无限趋近于视界,而且相对于视界静止的观测者,同时具有传递性",才是黑洞热力学第零定律的恰当表述。另外的等价说法是,"事件视界的母线线汇是超曲面正交的类光测地线汇",或者"事件视界母线线汇的切矢场 l^a 是超曲面正交的"。

在此基础上,我们证明了在整个局部视界上 Ω_H 是一个常数,从而证明了 l^a 是 Killing 矢量,相应的局部视界是 Killing 视界。对就保证了温度函数 K 的存在。K 被看作群参量对仿射参量的偏离,如果 l^a 不是 Killing 矢量,就谈不到"群参量",当然也就不可能定义温度函数 K。在这个意义上,也可以把"Ω_H 在整个视界上是一个常数",看作是黑洞热力学第零定律的一种表述形式。事实上,从前面的证明过程可以看出,Ω_H 等于常数是局部视界面的固有性质。

我们看到,正如普通热力学第零定律保证了温度函数的存在一样,我们定义的黑洞热力学第零定律,也保证了黑洞温度函数K的存在。稳态视界上的 K 是一个常数,只不过是黑洞热力学第零定律的推论。应当强调,我们定义的黑洞热力学第零定律,与普通热力学第零定律有相同的表述形式:同时具有传递性。事实上,黑洞热力学第零定律是普通热力学第零定律的一种类光极限。

参 考 文 献

[1] Bardeen, J. M. et al., *Commun. Math. Phys.*, **31**(1973), 161.

[2] Wald, R. M., *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984, 319, 337.

[3] 赵峥,北京师范大学学报(自然科学版),1986,2: 13.

[4] 赵峥,中国科学,A辑,1991,3:285.

[5] 赵峥、桂元星,天体物理学报,3(1983),146.

[6] 赵峥、刘辽,物理学报,40(1991),1546.

[7] Carter, B., *J. Math. Phys.*, **10** (1969), **70**.

[8] 赵峥,物理学报,39(1990),1854.