科学通报 2008 年 第 53 卷 第 6 期: 732 ~ 736
论 文
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

单相滞热传导温度场的振动现象及其热力学基础

程林①, 许明田①*, 王立秋②

① 山东大学热科学与工程研究中心, 济南 250061;
② 香港大学机械工程系, 香港
* 联系人, E-mail: mingtian@sdu.edu.cn

2007-11-22 收稿, 2008-01-20 接受
国家重点基础研究发展计划资助项目(编号: 2007CB206900)

摘要 传统的傅里叶定律存在一定的不足, 即导致了热扰动的传播速度无穷大. 单相滞热传导模型弥补了傅里叶定律这一不足. 首先说明此模型满足伽利略不变性原理, 因而优于著名的 Cattaneo-Vernotte 模型. 进而依此模型探讨了微观热传导中的振动现象, 给出了振动性热传导发生的条件. 改进了拓展不可逆热力学, 重新定义了广义非平衡热力学熵, 为单相滞热传导模型建立了热力学基础.

关键词
傅里叶定律
单相滞热传导
拓展不可逆热力学

传统的傅里叶定律是热传导中的一个基本定律, 其表示为

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)=-k\nabla T(\boldsymbol{r},t),$$

其中$\boldsymbol{q}$为热流密度矢量, k为导热系数, ∇ 为梯度算子, T为温度, $\boldsymbol{r}$为位置向量, t为时间. 尽管这一定律在一般的工程传热问题中得到了广泛和成功的应用, 但存在一定缺陷, 即傅里叶定律忽略了导热过程中惯性的影响, 因而导致热扰动的传播速度无穷大 [1]. 其表现为t时刻在传热介质中某点的热扰动, 在离此点的任何处可同时感受到温度的变化 [2~11]. 对大多数空间和时间尺度均为大尺度的热传导问题, 热扰动的传播速度非常大, 其有限值的影响可以忽略不计. 但一维离散系统中的许多导热现象 [12~19]和超快速激光加热过程中的导热现象无法由传统的傅里叶定律解释 [4,20~22]. 第二声(second sound)、低温固体中的弹道声子传播(ballistic phonon propagation)和声子流体动力学(phonon hydrodynamics)等的传热现象也明显偏离传统的傅里叶定律给出的结果 [4]. 同时, 随着纳米技术的飞速发展, 越来越多的微米级和纳米级的部件不断涌现, 在这些微尺度部件中发生的独特的导热现象, 譬如尺度效应和波动现象, 传统的傅里叶定律给出不能接受的结果 [11,23]. 因而已有许多工作用于改进传统的傅里叶定律 [1~4,9~11], 并建立了许多非傅里叶导热定律, 其中最著名的是Cattaneo-Vernotte模型(简称为CV模型), 又称为Maxwell-Cattaneo定律,

$$\tau\frac{\partial\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)=-k\nabla T(\boldsymbol{r},t), \tag{1}$$

其中τ为一迟滞时间参数(又称为松弛时间). CV 模型的一个自然推广为

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t+\tau)=-k\nabla T(\boldsymbol{r},t), \tag{2}$$

由Tzou[4]给出, 并称为单相滞热传导模型. Tzou[4]进一步把模型(2)推广如下

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t+\tau_q)=-k\nabla T(\boldsymbol{r},t+\tau_T), \tag{3}$$

其中 τ_q 和 τ_T 为两个时间迟滞参数, 此模型称为双相滞热传导模型. 在(3)式两边关于时间t进行一阶或二阶泰勒展开, 可得到近似的双相滞热传导模型 [4], 其中如下模型被广泛应用

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)+\tau_q\boldsymbol{q}_t(\boldsymbol{r},t)=-k(\nabla T(\boldsymbol{r},t)+\tau_T\nabla T_t(\boldsymbol{r},t)), \tag{4}$$

模型(4)导致如下导热的控制方程

$$T_t(\boldsymbol{r},t)+\tau_qT_{tt}(\boldsymbol{r},t)=\alpha(\Delta T(\boldsymbol{r},t)+\tau_T\Delta T_t(\boldsymbol{r},t)), \tag{5}$$

其中Δ为拉普拉斯算子, α 为热扩散系数, 下标t表示对时间的偏导数. 现有许多微观传热模型都可归结到方程(5), 诸如声子扩散模型 [2,25]和声子-电子相互作用模型 [26,27]等. 同时方程(5)在多孔介质的非均匀迟滞响应、温度脉冲在液态氦超流体中的传播、非晶材料的热的迟滞现象和材料的缺陷效应等都有广泛

的应用[4]. 因而对此方程的研究也备受关注. 我们已从Boltzmann传输方程推出了本构关系(3)[28], 基于方程(5)研究了导热的振动特性和共振现象[29]以及双相滞模型的普适性[30,31].

然而模型(1)在运动介质中不满足伽利略相对性原理[24], 最近我们发现模型(4)及其他近似双相滞热传导模型亦存在相同问题, 即在如下伽利略变换下 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{U}t, t'=t$, (其中$\boldsymbol{U}$为惯性坐标系的速度)导热的固有特性, 譬如热扰动的传播速度, 随$\boldsymbol{U}$的变化而变化, 这在物理上是不允许的. 模型(2)和(3)没有涉及关于时间的偏导数, 因而显然满足伽利略相对性原理. 所以相对于其他模型, 单相滞热传导模型(2)和双相滞模型(3)显示了其优越性. 振动性或者波动性是迟滞性导热模型区别于传统的傅里叶定律的重要特征, 现有文献中只有关于依据模型(1)[32,33]和模型(4)[29]的有关微观热传导的振动性的讨论. 在本文中, 我们试图依据模型(2)探讨热传导的振动性.

按照基于局域平衡假设的熵的定义, 温度场的振动性不符合热力学第二定律. 但局域平衡假设已不再适用于诸如超快速激光加热和纳米尺度的导热现象等的非平衡不可逆热力学系统[9,34]. 因而发展新的非平衡热力学理论, 以适应现代飞速发展的激光技术和纳米技术的发展, 就具有重要的理论和应用价值. 为寻求CV模型的热力学基础, 拓展不可逆热力学应运而生[9]. 在此理论中,熵不仅依赖于内能和比容等传统的变量, 还依赖于热流密度等通量型变量. 在此广义熵框架下, CV模型导致的温度场的振动现象符合热力学第二定律. 对近似双相滞模型(4), 亦有类似的工作[35,36]. 在本文中, 我们推广了现有的拓展不可逆热力学, 重新定义了熵的概念. 在此理论框架下, 我们证明了单相滞热传导模型(2)亦符合热力学第二定律.

1 单相滞热传导控制方程

考虑如下能量方程,

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)+Q(\boldsymbol{r},t)=c_p\frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}, \tag{6}$$

其中 c_p 为流体的定压比热容, Q 为热源. 由方程(2)和(6)可得如下单相滞热传导控制方程,

$$\Delta T(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{k}Q(\boldsymbol{r},t+\tau)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(\boldsymbol{r},t+\tau)}{\partial t}. \tag{7}$$

为了便于讨论, 关于时间变量做变换

$$t'=t+\tau,$$

但为书写方便仍沿用 t 表示时间, 这样方程(7)变为

$$\Delta T(\boldsymbol{r},t-\tau)+\frac{1}{k}Q(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}, t>\tau. \tag{8}$$

温度场的边界条件和传统导热的边界条件没有区别, 在一般情况下, 可表示为

$$g\frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}+hT(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{r}\in S, \tag{9}$$

其中 S 为导热区域 R 的界面, g 和 h 为两常数, 并满足 $g^2+h^2\neq 0$. 方程(9)中的偏导数是关于界面的法向方向的方向导数.

至于初始条件, 其表示如下,

$$T(\boldsymbol{r},t)=\phi(\boldsymbol{r},t), t\in[0,\tau], \tag{10}$$

可以看出, 此初始条件和传统的导热问题的初始条件有所不同. 此初始条件表示, 为了得到唯一的温度场, 我们必须给出初始 τ 时间段的温度分布, 其原因涉及到模型的普适性问题, 我们将另文讨论. 该初始条件等价于我们在初始时刻给出温度关于时间的任意阶偏导数. 方程(8)~(10)构成完整的基于模型(2)的温度场的初始和边界条件问题.

2 导热的振动现象

考虑如下一维单相滞导热问题,

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 T(x,t-\tau)}{\partial x^2}, 0<x<L, t>\tau, \tag{11}$$

$$T(0,t)=T(L,t)=0, \tag{12}$$

$$T(x,t)=\sin\frac{j\pi x}{L}, t\in[0,\tau], \tag{13}$$

其中 L 为一维导热介质的长度, x 为位置坐标, j 为一给定的正整数. 根据边界条件(12), 温度场 $T(x,t)$可展成如下级数,

$$T(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}T_i(t)\sin\frac{i\pi x}{L}, \tag{14}$$

把(14)式代入方程(11)并利用 $\sin i\pi x/L (i=1,2,\cdots)$ 的正交性, 可得

$$\frac{\mathrm{d}T_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\alpha i^2\pi^2}{L^2}T_i(t-\tau), t>\tau, (i=1,2,3,\cdots), \tag{15}$$

$$T_i(t)=0 (i\neq j), T_j(t)=1, t\in[0,\tau], \tag{16}$$

所以除 $T_j(t)$ 外, 其他 $T_i(t)(i\neq j)$ 均为 0, 即温度场可表示为

$$T(x,t)=T_j(t)\sin\frac{j\pi x}{L},$$

其中 T_j 满足

$$\frac{\mathrm{d}T_j(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\alpha j^2\pi^2}{L^2}T_j(t-\tau),\ t>\tau, \tag{17}$$

$$T_j(t)=1,\ t\in[0,\tau]. \tag{18}$$

在(17)和(18)式中，令 $t'=t/\tau$，并仍沿用 t 表示 t'，可得

$$\frac{\mathrm{d}T_j(t)}{\mathrm{d}t}=-\lambda T_j(t-1),\ t>1, \tag{19}$$

$$T_j(t)=1,\ t\in[0,1], \tag{20}$$

其中，

$$\lambda=\alpha\, j^2\pi^2\tau/L^2. \tag{21}$$

由迟滞微分方程理论知 [37]，当

$$\lambda>1/e,\ (e=2.71828\cdots) \tag{22}$$

时，迟滞微分方程(19)可产生振动现象．不等式(22)便是温度场发生振动的条件．从λ的表达式(21)可知，传热介质的尺度 L 越小，介质的导热性越好，λ越大，满足条件(22)的可能性就越大．同时λ还和初始温度分布有关，j 越大，即初始温度分布关于 x 的振荡频率越大，易引发温度场的振动现象．

应用逐步积分法可得 $T_j(t)$ 在区间$[n,n+1]$(n是任意大于 1 的整数)中的值 [37]，

$$\begin{aligned}T_j(t)=&\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-i)^i}{i!}(-1)^i\lambda^i\\&+\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=0}^{n-j-1}\frac{(n-i-j)^i}{i!}\frac{\lambda^j}{j!}(-1)^i(-1)^j\\&\times\lambda^i(t-n)^j+\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(t-n)^{n-1}\\&+\frac{\lambda^n}{n!}(-1)^n(t-n)^n.\end{aligned} \tag{23}$$

因而利用(23)式，$T_j(t)$ 在任意时刻的值均可求得．令 λ=0.2, 0.5, 0.8 和 1.0，计算得到的 $T_j(t)$随时间的变化由图1表示．由不等式(22)知，当 $\lambda>1.0/e$ 时，方可出现温度场的振动现象．因而λ=0.2 时，没有振动现象发生，这和图 1(a)所示的计算结果相符．而当λ=0.5 时，温度场应呈现出振动现象，这和图1(b)所示的计算结果亦相符．从图1(c)和(d)可知，当λ 继续增大，温度场的振动特性愈加明显．在此算例中，我们没有

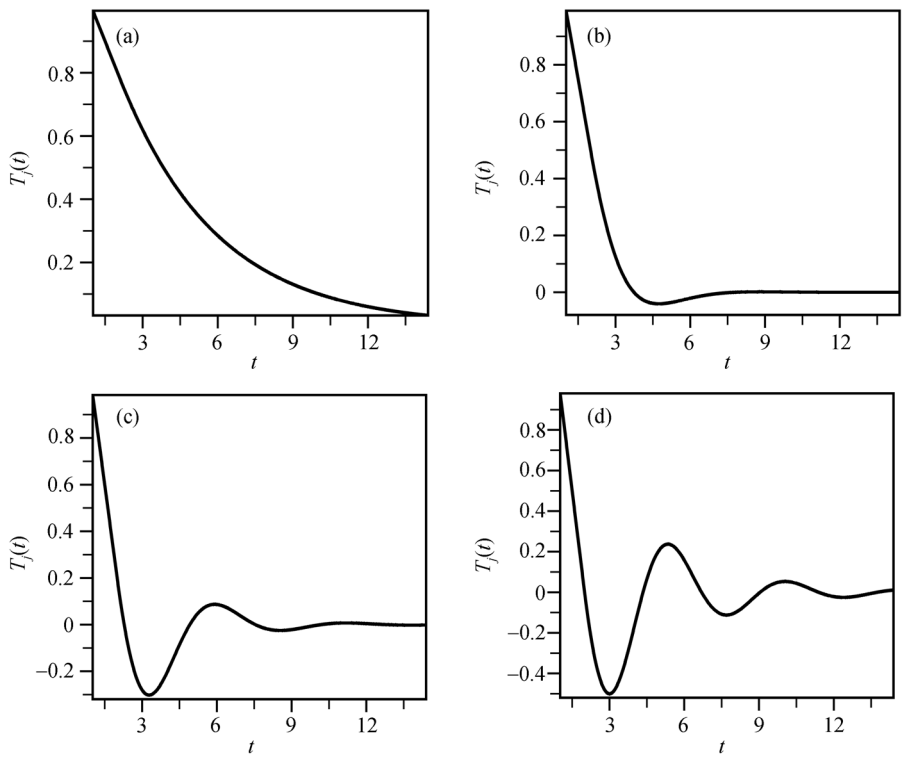

图 1　$T_j(t)$随时间 t 的变化情况

(a) λ = 0.2; (b) λ = 0.5; (c) λ = 0.8; (d) λ = 1.0

考虑热源的影响，因此可把图1(b)~(d)中的振动现象称为自由衰减振动. 根据机械振动理论，如果考虑热源，且热源随时间间谐振动，那么当热源的振动频率和传热介质的固有频率相等且忽略阻尼影响时,可引发热共振现象 [29,32].

3 单相滞热传导模型的热力学基础

按照传统的熵的定义，图1(b)~(d)所示的温度场的振动现象不符合热力学第二定律. 为解决这一矛盾，本节我们试图推广现有的拓展不可逆热力学理论，重新定义广义熵，从而使单相滞热传导模型服从热力学第二定律.

对无热源的刚性固体的热传导问题(为简便起见，以下讨论均限于刚性固体), Gibbs 方程表示为

$$\mathrm{d}s = T^{-1}\mathrm{d}u,$$

其中 s 为单位质量的熵, u 为单位质量的内能. 由此式可知，古典意义的熵只和内能有关. 而拓展不可逆热力学理论认为熵不仅和内能有关还和热流密度有关，即 Gibbs 方程应改写为

$$\mathrm{d}s = T^{-1}\mathrm{d}u - T^{-1}\rho^{-1}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{q}, \tag{24}$$

其中ρ 为刚性固体的密度，$\boldsymbol{q}$ 为热流密度矢量，待定矢量$\boldsymbol{\alpha}$ 满足关系

$$\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{q}} = -T^{-1}\rho^{-1}\boldsymbol{\alpha},$$

且是内能和热流密度矢量的函数. (24)式可改写为

$$\frac{\partial s}{\partial t} = T^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} - T^{-1}\rho^{-1}\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}, \tag{25}$$

按照(24)式中熵的定义, CV模型服从热力学第二定律 [9]. 既然在(25)式中熵的导数和热流密度的一阶导数有关，更严格一点，它应和所有的热流密度的高阶导数有关. 因而(25)式应改写为

$$\rho\frac{\partial s}{\partial t} = T^{-1}\rho\frac{\partial u}{\partial t} - T^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\frac{\partial^i \boldsymbol{q}}{\partial t^i}, \tag{26}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为关于内能和热流密度的函数. 很明显，方程(25)是(26)的特殊情况. 为简便起见我们设 [9]

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \alpha_{i0}\boldsymbol{q}, \tag{27}$$

其中 α_{i0} 为内能的函数. 应用无热源情形下的刚性固体的能量守恒方程

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q},$$

我们得到

$$\rho\frac{\partial s}{\partial t} = -\nabla\cdot(T^{-1}\boldsymbol{q}) + \nabla T^{-1}\cdot\boldsymbol{q} - T^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\frac{\partial^i \boldsymbol{q}}{\partial t^i}. \tag{28}$$

而熵的平衡方程为

$$\rho\frac{\partial s}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{J}^s + \delta^s, \tag{29}$$

其中 $\boldsymbol{J}^s$ 为熵通量, δ^s 为熵产率. 比较(28)和(29)式，可知

$$\boldsymbol{J}^s = T^{-1}\boldsymbol{q},$$
$$\delta^s = \nabla T^{-1}\cdot\boldsymbol{q} - T^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\frac{\partial^i \boldsymbol{q}}{\partial t^i}, \tag{30}$$

把(27)式代入(30)式中得,

$$\delta^s = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{q},$$

其中,

$$\boldsymbol{X} = \nabla T^{-1} - T^{-1}\sum_{I=1}^{\infty}\alpha_{i0}\frac{\partial^i \boldsymbol{q}}{\partial t^i}. \tag{31}$$

热力学第二定律要求 $\delta^s \geqslant 0$，为满足此要求，一个简单的选择是令 [9]

$$\boldsymbol{X} = \nabla T^{-1} - T^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{i0}\frac{\partial^i \boldsymbol{q}}{\partial t^i} = \mu\boldsymbol{q}, \tag{32}$$

其中μ 是内能的函数，并要求 $\mu \geqslant 0$. (32)式可改写为

$$\boldsymbol{q} = \mu^{-1}\nabla T^{-1} - \mu^{-1}T^{-1}\sum_{I=1}^{\infty}\alpha_{i0}\frac{\partial^i \boldsymbol{q}}{\partial t^i}. \tag{33}$$

取

$$\mu = (kT^2)^{-1[9]}, \qquad \alpha_{i0} = \frac{\tau^i}{Ti!k},$$

显然μ 大于零. (33)式变为

$$\boldsymbol{q} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\tau^i}{i!}\frac{\partial^i \boldsymbol{q}}{\partial t^i} = -k\nabla T,$$

由泰勒展开定理知

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}, t+\tau) = -k\nabla T(\boldsymbol{r}, t).$$

因而我们得到单相滞热传导模型(2). 由上面的推导可知，按照(26)式定义的广义熵，单相滞热传导模型(2)服从热力学第二定律.

4 结论

本文基于单相滞热传导模型，探讨了热传导中温度场的振动性，发现要在实验中得到热传导的振动和共振现象，应选取高导热率和小尺度的传热介质，同时应选取高频率简谐振动型的初始温度分布. 最后推广了拓展不可逆热力学理论，重新定义了广

义熵. 在新的热力学框架下, 单相滞热传导模型符合 热力学第二定律.

致谢 承蒙两位匿名审稿人对初稿的建设性建议和本文编辑的许多有益的修改意见, 本文得以完成, 在此深表谢意.

参考文献

1 过增元, 曹炳阳, 朱宏晔, 等. 声子气的状态方程和声子气运动的守恒方程. 物理学报, 2007, 56(6): 279—282
2 Joseph D D, Preziosi L . Heat waves. Rev Mod Phys, 1989, 61: 41—73[DOI]
3 Joseph D D, Preziosi L. Addendum to the paper "heat waves" [Rev Mod Phys, 61, 41 (1989)]. Rev Mod Phys, 1990, 62: 375—391[DOI]
4 Tzou D Y. Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior. Washington: Taylor & Francis, 1996
5 Tzou D Y. A unified field approach for heat conduction from micro- to macro-scales. J Heat Transfer, 1995, 117: 8—16[DOI]
6 Tzou D Y, Zhang Y S. An analytical study on the fast-transient process in small scales. Int J Eng Sci, 1995, 33: 1449—1463[DOI]
7 Chandrasekharaiah D S. Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature. Appl Mech Rev, 1998, 51: 705—729
8 Chandrasekharaiah D S. Thermoelasticity with second sound: a review. Appl Mech Rev, 1986, 39: 355—376
9 Jou D, Casas-Vázquez J, Lebon G. Extended irreversible thermodynamics revisited (1988-98). Rep Prog Phys, 1999, 62: 1035—1142[DOI]
10 Jou D, Casas-Vázquez J, Lebon G. Extended Irreversible Thermodynamics. Berlin: Springer, 2003
11 Tien C L, Majumdar A, Gerner F M. Microscale Energy Transport. Washington: Taylor & Francis, 1998
12 Lepri S, Livi R, Politi A. Thermal conduction in classical low-dimensional lattices. Phys Rep, 2003, 377: 1—80[DOI]
13 Li B, Wang J. Anomalous heat conduction and anomalous diffusion in one-dimensional lattices. Phys Rev Lett, 2003, 91: 044301[DOI]
14 Li B, Casati G, Wang J et al. Fourier law in the alternate-mass-hard-core potential chain. Phys Rev Lett, 2004, 92: 254301[DOI]
15 Narayan O, Ramaswamy S. Anomalous heat conduction in one-dimensional momentum-conserving systems. Phys Rev Lett, 2002, 89: 200601[DOI]
16 Savin A V, Tsironic G P, Zolotaryuk A V. Heat conduction in one-dimensional systems with hard-point interparticle interactions. Phys Rev Lett, 2002, 88: 154301[DOI]
17 Dhar A. Heat conduction in a one-dimensional gas of elastically colliding particles of unequal masses. Phys Rev Lett, 2001, 86: 3554—3557[DOI]
18 Prosen T, Campbell D. Momentum conservation implies anomalous energy transport in 1D classical lattices. Phys Rev Lett, 2000, 84: 2857—2860[DOI]
19 Giardiná C, Livi R, Politi A, et al. Finite thermal conductivity in 1D lattices. Phys Rev Lett, 2000, 84: 2144—2147[DOI]
20 Qiu T Q, Tien C L. Heat transfer mechanisms during short-pulse laser heating of metals. J Heat Transfer, 1993, 115: 835—841
21 Tang D W, Araki N W. Wavelike, diffusive thermal responses of finite rigid slabs to high-speed heating of laser-pulses. Int J Heat Mass Transfer, 1999, 42: 855—860[DOI]
22 Han P, Tang D W, Zhou L P. Numerical analysis of two-dimensional lagging thermal behavior under short-pulse-laser heating on surface. Int J Engng Sci, 2006, 44: 1510—1519[DOI]
23 Cahill D G, Ford W K, Goodson K E, et al. Nanoscale thermal transport. J Appl Phys, 2003, 93: 793—818[DOI]
24 Christov C I, Jordan P M. Heat conduction paradox involving second-sound propagation in moving media. Phys Rev Lett, 2005, 94: 154301[DOI]
25 Guyer R A, Krumhansi J A. Solution of the linearized phonon Boltzmann equation. Phys Rev, 1966, 148: 766—778
26 Kaganov M I, Lifshitz I M, Tanatarov M V. Relaxation between electrons and the crystalline lattice. Soviet Physics JETP, 1957, 4: 173—178
27 Qiu T Q, Tien C L. Heat transfer mechanisms during short-pulse laser heating of metals. J Heat Transfer, 1993, 115: 835—841
28 Xu M T, Wang L Q. Dual-phase-lagging heat conduction based on Boltzmann transport equation. Int J Heat Mass Transfer, 2005, 48: 5616—5624[DOI]
29 Xu M T, Wang L Q. Thermal oscillation and resonance in dual-phase-lagging heat conduction. Int J Heat Mass Transfer, 2002, 45: 1055—1061[DOI]
30 Wang L Q, Xu M T, Zhou X S. Well-posedness and solution structure of dual-phase-lagging heat conduction. Int J Heat Mass Transfer, 2002, 45: 1165—1171[DOI]
31 Wang L Q, Xu M T. Well-posedness of dual-phase-lagging heat conduction equation: higher dimensions. Int J Heat Mass Transfer, 2002,45: 1165—1171[DOI]
32 Tzou D Y. Damping and resonance characteristic of thermal waves. J Appl Mech, 1992, 59: 862—866
33 Fan Q, Lu W Q. Some non-Fourier heat conduction characters under pulsed inlet conditions. Chin Sci Bull, 2004, 49(3): 225—230
34 Barletta A, Zanchini E. Hyperbolic heat conduction and local equilibrium: a second law analysis. Int J Heat Mass Transfer, 1997, 40: 1007—1016[DOI]
35 Jou D, Criado-Sancho M. Thermodynamic stability and temperature overshooting in dual-phase-lag heat transfer. Phys Lett A, 1998, 248: 172—178[DOI]
36 Serdyukov S I. A new version of extended irreversible thermodynamics and dual-phase-lag model in heat transfer. Phys Lett A, 2001, 281: 16—20[DOI]
37 Györi I, Ladas G. Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Application. Oxford: Clarendon Press, 1991