关于电磁场与引力规范理论

钟 在 哲

(河北省故城县郑口中学)

张元仲、郭汉英[1]曾经为讨论引力规范理论[2,3]与 GR 三大验证的问题，在作了一个假定——引力规范理论中的电磁场仍为 U(1) 规范场后，讨论过引力规范理论中的电磁场问题. 但他们并未涉及到这时引力场本身的结构问题，本文作这方面的讨论. 我们导出存在电磁场时的引力规范理论场方程，证明当空间中有非零电磁场时，则不存在无限远处化为平直度规的球对称静止无挠解. 这与 GR 的情况是不一样的，包含了新的内容.

一

设电磁场的势为 $A_\mu(\mu = 0—3$，μ 为空间分量指标). Minkowski 空时中的真空中电磁场的拉氏量为

$$L_{em} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}, \tag{1}$$

式中 $f_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$，用平直度规 $\eta_{\mu\nu}$ 升降指标，$(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$. 当考虑入引力场时，设正常双曲 Riemann 空时的局部 Lorentz 标架为 $e^\mu_a(a = 0—3$，a 为标架编号)，度规 $g_{\mu\nu} = e^a_\mu e_{a\nu}$. 按文献[1]，为保持引力规范理论中的电磁场仍为$U(1)$规范的，则拉氏量不应按正常办法那样改为

$$L'_{em} = -\frac{1}{4} f_{ab} f^{ab}, \tag{2}$$

其中 $f_{ab} = e^\mu_a f_{b\,//\mu} - e^\nu_b f_{a\,//\nu}$，"//" 表示按文献[2]定义的对任意坐标变换和局部 Lorentz 变换的双重协变微商. 而应当取为

$$\mathscr{L}_{em} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}, \tag{3}$$

即形式上与 L_{em} 相同，但平移规范势即标架 e^μ_a 已进入拉氏量中，因为现在是用 $g_{\mu\nu}$ 来升降指标. 这时由于 Lorentz 规范势 B^μ_{ab} 并未进入拉氏量，故真空中电磁场的动力学自旋流为零

$$S^\mu_{ab(em)} = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\delta(\varepsilon \mathscr{L}_{em})}{\delta B^{ab}_\mu} = 0,$$

$$\varepsilon = \det(e^a_\mu) = \det(g_{\mu\nu}) = \sqrt{-g}.$$

现设空间中某有限大区域内不仅存在普通物质，而且还有电荷，那么，在这个区域之外的真空中，场的总拉氏量就应当是 (亦即 Lorentz 群 $\otimes U(1)$ 规范不变)

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \mathscr{L}_g + \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{em} \\ &= -\frac{\eta}{4}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - x\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}e^{\mu\nu}) - \frac{\lambda}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{4}$$

本文 1980 年 5 月 12 日收到.

其中

$$F_{\mu\nu} = (F^a_{b\mu\nu}),$$
$$F^a_{b\mu\nu} = \partial_\nu B^a_{b\mu} - \partial_\mu B^a_{b\nu} + [B^a_{b\mu}, B^a_{b\nu}],$$
$$e^a_{b\mu\nu} = \eta_{bc} e^a_{[\mu} e^c_{\nu]},$$

η, x, λ 为耦合常数,记号[ ]表示反称化. 假定最小作用量原理成立,以 e^μ_a, B^μ_{ab}, A_μ 为独立变量对作用量

$$I = \int \varepsilon \mathscr{L} d^4x,$$

进行变分,则得到场方程

$$\begin{cases} F^\mu_a - \dfrac{1}{2} e^\mu_a F = -\dfrac{1}{2x}(\eta t^\mu_a + \lambda T^\mu_{a(em)}), & (5a) \\ \eta F_{ab}{}^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 2x s^\mu_{ab}, & (5b) \\ f^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0. & (5c) \end{cases}$$

方程(5c)就是熟知的弯曲空时中的电磁场方程

$$F_a{}^\mu = F_{bc}{}^{\nu\lambda} e^c_\lambda e_{a\nu} e^{b\mu},$$
$$F = e^a_\mu F_a{}^\mu,$$
$$t^\mu_a = -\mathrm{tr}(F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\mu}) e^\lambda_a + \frac{1}{4}\mathrm{tr}(F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}) e^\mu_a,$$
$$T_a{}^\mu{}_{(em)} = -f_{\sigma\lambda} f^{\sigma\mu} e^\lambda_a + \frac{1}{4} f_{\lambda\sigma} f^{\lambda\sigma} e^\mu_a,$$
$$s^\mu_{ab} = \frac{1}{2x\varepsilon} \frac{\delta(\varepsilon \mathscr{L}_0)}{\delta B^{ab}_\mu} = -e_{ab}{}^{\mu\nu}{}_{\|\nu}.$$

$T_a{}^\mu{}_{(em)}$ 为电磁场的能量动量, s^μ_{ab} 为引力场的自旋流. 各耦合常数这样来确定,即假定不存在电磁场,方程应回到通常引力规范理论形状,可见, $x = (16\pi k)^{-1}$, (取光速 $c = 1$), k 为引力常数. η 则应由实验确定. 至于 λ, 我们可以认为电磁场的能量动量与普通物质一样起引力场源的作用,则 $\lambda = \dfrac{1}{4\pi}$.

方程 (5a)、(5b) 与通常引力规范理论相比较,只是 (5a) 右边多了一项. 按这种方案[1]的考虑,这一项的出现是很自然的.

把方程(5)写成关于空间分量指标的形式,则为

$$\begin{cases} F_\mu{}^\nu - \dfrac{1}{2}\delta^\nu_\mu F = -\dfrac{1}{2x}\left(\eta t_\mu{}^\nu + \dfrac{1}{4\pi} T^\nu_{\mu(em)}\right), \\ F_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}{}_{;\sigma} + 2F_{\lambda[\mu}{}^{\rho\sigma}\ \mathrm{Y}^\lambda_{\nu]\sigma} = \dfrac{2x}{\eta} s_{\mu\nu}{}^\rho, \end{cases}$$

式中 $F_\mu{}^\nu = e^a_\mu F_a{}^\nu$, 等等,记号";"表示由 Christoffel 记号(即通常的无挠 Riemann 联络) $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ 所定义的协变微商. $T_{ab}{}^\mu = B^\mu_{ab} - B^\mu_{ba}$ 为引力场的挠率,则

$$2s^\rho_{\mu\nu} = T^\rho_{\mu\nu} + 2T^\lambda_{\rho[\mu}\delta^\rho_{\nu]},$$
$$\mathrm{Y}^\rho_{\nu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}.$$

利用 t^ν_μ 与 $T^\nu_{\mu(em)}$ 的特性,收缩指标后知 $F = 0$, 故场方程最后化为

$$\begin{cases} F_{\mu}{}^{\nu} = -\dfrac{1}{2x}\left(\eta t_{\mu}^{\nu} + \dfrac{1}{4\pi} T^{\nu}_{\mu(em)}\right), & (6a) \\ F_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}{}_{;\sigma} + 2F_{\lambda[\mu}{}^{\rho\sigma}\Upsilon^{\lambda}_{\nu]\sigma} = \dfrac{2x}{\eta} s^{\rho}_{\mu\nu}. & (6b) \end{cases}$$

若引力场是无挠的，则方程(6)立即化为存在电磁场时的 Einstein-杨振宁场方程

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} = -\dfrac{1}{2x}\left(\eta t_{\mu\nu} + \dfrac{1}{4\pi} T_{\mu\nu(em)}\right), & (7a) \\ R_{\mu\nu;\lambda} = R_{\mu\lambda;\nu}, & (7b) \end{cases}$$

$R_{\mu\nu}$ 为 Ricci 张量.

二

我们来证明当空间存在非零电磁场时，引力场不可能是在无限远处趋于平直而又球对称静止无挠的，即证明场方程(7)无球对称静止解. 球对称静态线元一般形式为

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

详细写出方程 (7 a) 的各项(例如利用文献[4]中的计算结果)，就是

$$A = \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\nu' - \lambda')}{2}\right)e^{-\lambda},$$

$$B = -\frac{\nu'}{2r}e^{-\lambda},$$

$$C = \frac{\lambda'}{2r}e^{-\lambda},$$

$$D = \frac{1}{r^2}(1 - e^{-\lambda}),$$

其中“,”表示对 r 的导数.

$$\begin{cases} R^0_0 = A + 2B, \quad R^1_1 = A + 2C, \\ R^2_2 = R^3_3 = B + C + D, \text{其余 } R^{\mu}_{\nu} = 0 \ (\mu \neq \nu). \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^0_0 = A^2 + 2B^2 - 2C^2 - D^2, \\ t^1_1 = A^2 - 2B^2 + 2C^2 - D^2, \\ t^2_2 = t^3_3 = D^2 - A^2, \\ \text{其余 } t^{\mu}_{\nu} = 0 \qquad (\mu \neq \nu). \end{cases}$$

至于 $T^{\mu}_{\nu(em)}$，由于空时无挠，为熟知的结果

$$\frac{1}{4\pi} T^{\mu}_{\nu(em)} = \omega(r) \cdot \mathrm{diag}\,(1, 1, -1, -1).$$

其中 $\omega(r)$ 为空间电场能密. 代入 (7a)

$$\begin{cases} A + 2B = -\dfrac{1}{2x}[\eta(A^2 + 2B^2 - 2C^2 - D^2) + \omega], & (8a) \\ A + 2C = -\dfrac{1}{2x}[\eta(A^2 - 2B^2 + 2C^2 - D^2) + \omega], & (8b) \\ B + C + D = -\dfrac{1}{2x}[\eta(D^2 - A^2) - \omega]. & (8c) \end{cases}$$

由 (8a) 式与 (8b) 式，

$$B - C = -\frac{\eta}{x}(B^2 - C^2).$$

若 $B \neq C$，则 $-\frac{\eta}{x}(B + C) = 1$，与无限远处的边界条件矛盾，故必 $B = C$．于是

$$\nu' = -\lambda', \quad \nu + \lambda = \text{常数 } K.$$

由无限远处边界条件，$K = 0$，$\nu = -\lambda$．由 (8) 式

$$R_0^0 = R_1^1 = -R_2^2 = -R_3^3 = \xi(r).$$

于是

$$R_{00} = e^{-\lambda}\xi, \quad R_{11} = -e^{\lambda}\xi, \quad R_{22} = -r^2\xi,$$
$$R_{33} = -r^2\sin^2\theta \cdot \xi, \quad \text{其余 } R_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

代入 (7 b) 就会发现，这时的杨振宁方程除了恒等式 $0 = 0$ 外，就都化为 $\xi' = 0$．于是 $\xi =$ 常数．由无限远处边界条件，$\xi = 0$．但这是不可能的，因为所有的 $R_{\nu}^{\mu} = 0$，则 $R_{\mu\nu} = 0$．利用关于 Weyl 张量的 Géheniau-Debever 分解公式，可以推知[4]，此时必有 $t_{\mu\nu} = 0$．而这是与方程 (7a) 相矛盾的，因为 $\omega(r) \neq 0$．可见，球对称静止无挠解不存在，证毕．

三

讨论以下几点：

1. 若不考虑电磁场，则 Einstein-杨振宁场较之 GR，在真空静态情形实际并无新内容[4]．现按方案[1]考虑 λ 电磁场，则已与 GR 不同，在 GR 中，对单个集中质量 M 与电荷 Q，存在球对称静止(无挠)解，即 R-N 度规

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2kM}{r} + \frac{kQ^2}{r^2}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2kM}{r} - \frac{kQ^2}{r^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

2. 方案[1]的优点是，光子在引力场中的行为与 GR 中相似．特别，若忽略太阳附近的弱挠率场，则光子应沿测地线运动，因而这种引力规范理论方案亦能解释三大验证之一，即光线偏折效应．不过，由于实际上并不存在严格的球对称静止无挠解，因此当考虑强大荷电星体周围情况时，如何应用这一方案及其适用范围似应予考虑．

3. 另外，按文献 [5]，无源杨振宁方程 (7b) 可以有依赖于两个参数 a，b 的解析解 (若 $a = b$，就是 Schwarzschild 解)．同样可以直接证明，对方程(7 a)此种解不可能，除非是有 $\omega(r) = 0$．

参 考 文 献

[1] 张元仲、郭汉英，科学通报，**18**(1973)，122．
[2] 郭汉英、吴詠时、张元仲，科学通报，**18**(1973)，72．
[3] 邹振隆等，中国科学，1979，4:366．
[4] 吴詠时、邹振隆、陈 时，科学通报，**18**(1973)，119．
[5] Gu, C. H. & Yang, C. N., *Scientia Sinica*, **18** (1975), 438; 谷超豪、杨振宁，复旦学报 (自然科学版)，1975，2：27．