弹塑性裂纹尖端场研究的最近进展*

黄克智　　罗学富
（清华大学，北京）

关键词　弹塑性扩展裂纹、裂纹尖端场、可压缩材料、理想弹塑性

尖端场的研究是断裂力学中的核心问题之一．本文讨论 I 型平面应变裂纹在理想弹塑性材料中的准静态定常扩展．如果材料是不可压缩的（泊松比 $\nu=1/2$），Slepyan，Gao 与 Rice 分别得到的四区解（即裂尖场上半平面由四个区组成，以后称为不可压缩材料的解）已为学术界所接受．但是当材料为可压缩（$\nu<1/2$）时，还存在着争议．Rice 等[1] 将四区解推广用于可压缩材料情况．高玉臣[2] 指出，在上述四区解的弹性卸载区内服屈条件遭到破坏，并提出了一个裂纹前方有应变奇异性的五区解（见图 1）．但是这个五区解当材料趋于不可压缩时并不过渡到不可压缩材料的解．此后，Drugan 等[3] 也得到了一个五区解，在裂纹前方无应变奇异性．关于解的正确性还存在争议．本文作者最近得到了以下三个方面的结果：

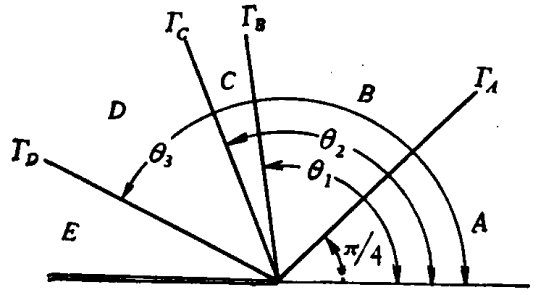

图 1

1. 按高玉臣与黄克智[4-6]的理论提法框架，得到了一个对可压缩材料的五区解．当 $\nu\to 1/2$ 时，这个解过渡到不可压缩材料的解．下面只指出这个解法与不可压缩材料解法的几个不同之处．除了应力函数依赖于泊松比 ν，即

$$\phi(r,\theta,\nu)=r^2F(\theta,\nu) \tag{1}$$

以外（r,θ 为以裂纹尖端为原点的极坐标）：

（1）必须多引进一个变量 $\zeta=\zeta(\theta,\nu)$，即

$$\zeta=-\frac{3}{2e}s_{33}=-\frac{1}{e}\left\{\sigma_{33}-\frac{1}{2}(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})\right\},\quad e=\frac{1}{2}-\nu, \tag{2}$$

本文以下标 3 表示垂直于应变平面的方向．

（2）屈服条件的形式更为复杂：

$$\frac{1}{4}F''^2+F'^2+\frac{1}{3}e^2\zeta^2=\tau_0^2, \tag{3}$$

本文中以一撇“′”表示对 θ 的偏导数．

（3）平面应变条件 $\dot{\varepsilon}_{33}=0$ 在不可压缩材料情况下导致

$$\sigma_{33}=\frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22})=\frac{1}{2}(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}),$$

本文 1988 年 4 月 12 日收到．
* 国家自然科学基金资助项目．

而在可压缩材料情况中则导致渐近方程 ($r \to 0$):

$$\zeta' + \frac{2}{3}\frac{1}{\sin\theta} Er\lambda\zeta = F''' + 4F', \tag{4}$$

(4)式的推导过程使用了塑性流动法则及定常扩展条件(设裂纹扩展速度 $a = 1$):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\quad) = \left(\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)(\quad). \tag{5}$$

(4) 利用下述协调方程率 (λ 表示塑性流动因子, x 沿裂纹扩展方向):

$$\frac{1-\nu^2}{E}\Delta\Delta\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{1}{2}(\nabla_1\nabla^1 - \nabla_2\nabla^2)\phi\cdot(\nabla_1\nabla^1 - \nabla_2\nabla^2)\lambda - 2(\nabla_1\nabla^2\lambda)(\nabla_2\nabla^1\phi)$$
$$-\frac{1}{2}\lambda\Delta\Delta\phi - (\nabla_\alpha\lambda)(\nabla^\alpha\Delta\phi) - \frac{2}{3}\varepsilon^2\Delta(\lambda\zeta) = 0 \tag{6}$$

代替协调方程. 故在区域与区域之间的分界线 Γ 处, 必须满足 ζ 连续及下列五个连接条件:

$$[\![F]\!]_\Gamma = [\![F']\!]_\Gamma = [\![F'']\!]_\Gamma = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1-\nu^2}{E}\frac{1}{r}[\![F''']\!]_\Gamma + \frac{1}{2\sin\theta_\Gamma}[\![\lambda F'']\!]_\Gamma + \frac{2}{3}\varepsilon^2\frac{1}{\sin\theta_\Gamma}[\![\lambda\zeta]\!]_\Gamma - 2\frac{d}{dr}[\![\varepsilon^p_{r\theta}]\!]_\Gamma = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1-\nu^2}{E}\frac{1}{r^2}[\![F^{(4)}]\!]_\Gamma + \frac{1-\nu^2}{E}\cot\theta_\Gamma\frac{1}{r^2}[\![F''']\!]_\Gamma + \frac{1}{2\sin\theta_\Gamma}\frac{1}{r}[\![\lambda' F'']\!]_\Gamma$$
$$+\frac{1}{2\sin\theta_\Gamma}\frac{1}{r}[\![\lambda F''']\!]_\Gamma + \frac{2}{\sin\theta_\Gamma}\frac{1}{r}[\![\lambda F']\!]_\Gamma + \frac{2}{3}\varepsilon^2\frac{1}{\sin\theta_\Gamma}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\lambda\zeta)\right]_\Gamma$$
$$+\frac{2}{\sin\theta_\Gamma}F'\frac{d}{dr}[\![\lambda]\!]_\Gamma = 0, \tag{9}$$

本文以 $[\![\quad]\!]_\Gamma$ 表示越过分界线 Γ 的间断量. 在推导以上连接条件(7)—(9)时, 曾假定区域分界线 Γ 的曲率在裂纹尖端处可以有奇异性(当 $r \to 0$), 但奇异性弱于 $\left[r\ln\left(\frac{A}{r}\right)\right]^{-1}$, 其中 A 为一常数.

(5) 必须使用高玉臣与黄克智[4-6]所证明的"卸载定理", 即对可压缩材料 ($\varepsilon > 0$), 若在前方的塑性区与后方的弹性卸载区之间的交界 Γ (称为卸载边界, 见图 1 中的 Γ_c) 处, 存在 $\zeta/r \neq 0$ 或 $(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r \neq 0$, 则在塑性区一侧(记作 $\Gamma(P)$) 必有

$$\lambda|_{\Gamma(P)} = 0, \tag{10}$$

因此在图 1 中的 c 区内应要求 $\lambda|_{rc} = 0$. (10) 式对于不可压缩材料则不成立.

(6) 在图 1 中 A 为均匀应力区, 其中 $\lambda = O(1)$; B 为扇形区, 其中 $\lambda = O\left(\frac{1}{r}\ln\frac{A}{r}\right)$; D 为弹性卸载区, 其中 $\lambda = 0$; C, E 区即高玉臣[2]所称的"一般塑性区"或 Rice[7] 所称的"非奇异塑性区", 其中 $\lambda = O(r^{-1})$. 可压缩材料情况比不可压缩材料情况更为复杂, 主要在于 C, E 区. 在这两个区中, ζ, λ, F 的基本方程可由屈服条件(3), 平面应变条件(4)与协调方程率(6)得到, 即

$$\zeta = -\frac{\sqrt{3}}{\varepsilon}\left(\tau_0^2 - \frac{1}{4}F''^2 - F'^2\right)^{1/2}, \tag{11}$$

$$\lambda = \frac{3}{2Er}\frac{\sin\theta}{\zeta}(F''' + 4F')\left(1 + \frac{3}{4\varepsilon^2\zeta}F''\right), \tag{12}$$

$$\frac{1}{E}\left(\frac{3}{4} + \varepsilon + \frac{3}{2\zeta}F'' + \frac{9}{16\varepsilon^2}\frac{F''^2}{\zeta^2}\right)(F''' + 4F') = C_1\cot\theta + C_2, \tag{13}$$

式中 C_1, C_2 为积分常数. 将(11)式的 ζ 代入(13)式后,即得到 F 的微分方程. 在 C 区内,由于在 Γ_B 处 $\zeta = 0$, 因此数值积分不能从 $\theta = \theta_1$ 处开始,而必须利用由(11)—(13)式及 Γ_B 处连接条件得到的在 $\theta = \theta_1$ 附近的台劳级数:

$$F = \frac{\tau_0}{2}\left\{b - 2\left(\theta_1 - \frac{\pi}{4}\right)\right\} - \tau_0(\theta - \theta_1) + \frac{(3+4\varepsilon)^2}{240\varepsilon^2\sin^2\theta_1}\tau_0(\theta - \theta_1)^3 + \cdots,$$

$$\xi = -\frac{(3+4\varepsilon)}{4\sqrt{2}\,\varepsilon^2\sin\theta_1}\tau_0(\theta - \theta_1)^2 + \cdots. \tag{14}$$

与此类似,在 E 区内由(4)式

$$\zeta \to 0, \text{ 当 } \theta \to \pi, \tag{15}$$

因此数值积分也不能一直进行到裂纹面 $\theta = \pi$, 而只能进行到 $\theta = \pi - \eta$ (η 为一小角, 例如 0.1°). 此时通过由(11)—(13)式得到的在 $\theta = \pi$ 附近的台劳级数,可将裂纹面自由条件 $F'(\pi) = 0$ 改写为

$$\tilde{F}''' = -\tilde{F}'\tilde{F}''\eta + 2\left(\tilde{F}''' + \frac{1}{3}\varepsilon^2\tilde{\zeta}^2\right)\eta^2, \tag{16}$$

其中带"~"的量为在 $\theta = \pi - \eta$ 处的值.

最后得到满足全部方程、各区域交界线连接条件与 $\theta = 0, \pi$ 处边界条件的解为

A 区:

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$$

$$F = \frac{\tau_0}{2}(b + \cos 2\theta); \tag{17}$$

B 区:

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \theta_1$$

$$F = \frac{\tau_0}{2}\left\{b - 2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{E}\left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right)\frac{1}{r}\ln r, \tag{18}$$

$$[\![\varepsilon_{r\theta}^p]\!]_{\Gamma_A} = \frac{1}{2}(3+4\varepsilon)\frac{\tau_0}{E}\ln\frac{\bar{R}}{r};$$

C 区:

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$$

解由积分(11)—(13)式而得到,(13)式中的常数为

$$C_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\tau_0}{E}(3+4\varepsilon)\sin\theta_1,$$

$$C_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\tau_0}{E}(3+4\varepsilon)(\sqrt{2} - \cos\theta_1), \tag{19}$$

且

$$[\![\varepsilon_{r\theta}^p]\!]_{\Gamma_B} = 0; \tag{20}$$

D 区:

$$\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \theta_3$$

$$F = \frac{E}{1-\nu^2}\{D_1 + D_2\theta + D_3\cos 2\theta + D_4\sin 2\theta + F^*\}, \tag{21}$$

式中

$$F^* = -\frac{D_c}{4}\left\{(\cos 2\theta - 1)\ln\sin\theta + \left(\theta + \frac{1}{2}\cot\theta\right)\sin 2\theta\right\}; \tag{22}$$

E区：$\theta_3 \leqslant \theta \leqslant \pi$

解由积分(11)—(13)式而得，(13)式中的常数 C_1 与 C_2 同(19)式.

对以上解法的数值计算为一单参数(例如 θ_1)"打靶"问题，其迭代步骤为：1) 假定 θ_1 值；2) 由(19)式计算 C_1, C_2；3) 由(14)式计算 C 区在 $\theta = \theta_1 + \eta$ ($\eta = 0.1^0$)处的积分初值(暂取 $b = 0$)；4) 积分(13)式，按(12)式计算各点 λ，由卸载条件(10)确定 θ_2；5) 由 Γ_c 处的五个连接条件(7)—(19)确定(21)式中的常数 D_1, D_2, D_3, D_4, D_0；6) 由(3)式按再次进入屈服的条件决定 Γ_D 处 θ_3 角；7) 由 Γ_D 处的(7)式确定 E 区在 Γ_D 处的积分初值；8) 积分(13)式至 $\theta = \pi - \eta$ ($\eta = 0.1^0$)，检验条件(16)是否满足，若不满足，则假定新的 θ_1 值，重复以上计算，直至满足为止；9) 由裂纹面自由条件 $F(\pi) = 0$ 决定常数 b.

用这种算法，可求得全部常数、角度与应力应变场. 当 $\nu = 0.3$ 时，得

$$\theta_1 = 110.09^\circ,\ \theta_2 = 118.20^\circ,\ \theta_3 = 160.42^\circ.$$

2. 论证了 Drugan 等[3]解在 C 区中出现 λ 为负的情况，因而破坏了塑性流动法则. 其根源在于 Drugan 等 1) 忽视了卸载定理，即(10)式，而代之以一个多余的条件(15). 实际上，条件(15)是可由方程(4)本身导出的结论；2) 没有用条件(16)来代替 $F'(\pi) = 0$. Drugan 等把问题当作双参数 (θ_1, θ_2) 的打靶问题，缺少了一个条件(10)，同时却又增加一个参数 θ_2. 显然 Drugan 等的打靶问题在数学上是不适定的. 本文作者同样也在 Rice[7] 的理论提法框架内，补充以条件(10)，进行与前述类似的数学处理后，证明所得的解与第一节所述理论提法框架内所得的解是一致的.

3. 得到了在不可压缩材料解 ($\varepsilon = 0$) 的基础上，以 ε 为小参数的直到 ε^2 项的渐近展开. 这一渐近展开提供了人们对可压缩材料解当 $\varepsilon \to 0$ $\left(\nu \to \frac{1}{2}\right)$ 时如何过渡到不可压缩材料解的过程有更深刻的认识. 所有的量提供了近似的解析表达式，例如对 θ_i 角 ($i = 1, 2, 3$) 有

$$\theta_i = \theta_{i0} + \varepsilon\theta_{i1} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\theta_{i2}, \tag{25}$$

其中 θ_{i0} 表示不可压缩材料情况的 θ_i 值：

$$\theta_{10} = \theta_{20} = 112.08^\circ,\ \theta_{30} = 162.10^\circ,\ \theta_{i1} = 0\ (i = 1, 2, 3),\ \text{而}$$

$$\theta_{12} \approx -62.98^\circ,\ \theta_{22} \approx 189.00^\circ,\ \theta_{32} \approx 91.00^\circ.$$

此外，本文作者还探讨了当区域分界线的曲率在裂纹尖端处具有更高奇异性时存在其他渐近解的可能性.

参 考 文 献

[1] Rice, J. R., Drugan, W. J. and Sham, T. L., *ASTM STP* 700, 1980, 189—221.

[2] Gao, Y. C., *ASTM STP* 803, 1983, 1.

[3] Drugan, W. J., Rice, J. R. and Sham, T. L., *J. Mech. Phys. Solids*, **30**(1982), 447—473.

[4] Gao, Y. C. and Hwang, K. C., in *Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture* (ed. Nemat-Nasser, S.), North-Holland Pub. Co., 1981, 417—434.

[5] Gao, Y. C. and Hwang, K. C., in *Advances in Fracture Research, Proc. ICF5*, **2**(1981), 669—682.

[6] Gao, Y. C. and Hwang, K. C., *Int. J. of Eng. Sci.*, **21**(1983), 765—780.

[7] Rice, J. R., in *Mechanics of Solids*, (ed. Hopkins, H. G. and Sewell, M. J.), Pergamon Press, 1982, 539—562.