科学通报
第 41 卷 第 22 期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1996 年 11 月

一种新的高效高精度隐式矢通量差分方法*

刘 仪 刘 斌
(西安交通大学叶轮机械研究所,西安 710049)

关键词 隐格式 矢通量分裂 激波

现代流体机械都向着高效率方向发展,航空发动机、工业燃气轮机、蒸汽轮机等现代原动机还不断提高功率,因而必然会对其通流部分的设计提出更高的要求. 而其内部流动结构极为复杂,有二次流、边界层的发展转捩现象、分离、再附以及级间的干涉等等,现代叶栅还有部分工作在亚音、部分工作在超音的跨音流动状态. 因此对流场的研究、设计应从两方面着手,一是粘性绕流问题;另一是内部的跨音流动.

文献[1]中提出了一种构造隐格式的简单方法. 该方法是基于时间相关的高阶小量,通过它可以直接形成隐式光滑因子. 与传统方法相比,本方法是 Jacobi 谱半径格式且无近似因子分解. 本文将它应用到 Steger-Warming 分裂格式中去,得到一种高效、高精度的隐式矢通量分裂格式,可直接求解 Navier-Stokes 方程组.

1 格式构造与计算方法

在任意曲线坐标系下,二维无因次 N-S 方程组的守恒型[2]

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}+\frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial \hat{F}r}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{G}r}{\partial \eta}\right). \tag{1}$$

应用 Steger-Warming 分裂方法[3]对矢通量 $\hat{F},\hat{G}$ 进行分裂,可得

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}+\frac{\partial \hat{F}^{+}}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{F}^{-}}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{G}^{+}}{\partial \eta}+\frac{\partial \hat{G}^{-}}{\partial \eta}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial \hat{F}r}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{G}r}{\partial \eta}\right), \tag{2}$$

其中亚矢可整理如下:

$$\hat{F}^{\pm}=\frac{J\rho}{2\gamma}\left[C_1,\ C_1u+C_2a\bar{\xi}_x,\ C_1v+C_2a\bar{\xi}_y,\ C_1\frac{u^2+v^2}{2}+C_2a\bar{\xi}_xu+C_2a\bar{\xi}_yv+C_3\frac{a^2}{\gamma-1}\right]^{-1};$$

$$\hat{G}^{\pm}=\{\hat{F}^{\pm}\mid \xi \text{ 换成 } \eta\},$$

式中

$$C_1=2(\gamma-1)\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ C_2=\lambda_3-\lambda_4,\ C_3=\lambda_3+\lambda_4.$$

由无矩阵运算、无近似因子分解的隐格式构造思想,按照模型方程的推导,再结合矢通量沿不同方向分裂的特点,在方程组(2)右端添加高阶无穷小量,可得

1995-09-29 收稿,1995-12-15 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}+\frac{\partial \hat{F}^{+}}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{F}^{-}}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{G}^{+}}{\partial \eta}+\frac{\partial \hat{G}^{-}}{\partial \eta}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial \hat{F}r}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{G}r}{\partial \eta}\right)-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_{\xi}^{+}\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}\right)+$$
$$\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_{\xi}^{-}\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}\right)-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda_{\eta}^{+}\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}\right)+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda_{\eta}^{-}\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}\right)-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial^{2}\xi}\left(\lambda_{r\xi}\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}\right)-$$
$$\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial^{2}\eta}\left(\lambda_{r\eta}\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}\right), \tag{3}$$

其中 $\lambda_{\xi}^{+},\lambda_{\xi}^{-},\lambda_{\eta}^{+},\lambda_{\eta}^{-}$ 分别是与 $\hat{F}^{+},\hat{F}^{-},\hat{G}^{+},\hat{G}^{-}$ 的特征值有关的标量，$\lambda_{r\xi},\lambda_{r\eta}$ 分别是与 $\hat{F}r$，$\hat{G}r$ 的特征值有关的标量. 这些添加项都是与 $\partial\hat{U}/\partial t$ 有关的非定常项，对方程的定常解是没有影响的. 添加的高阶小量实质上是一种隐式残差平滑手段，因而从本质上不同于为使格式求解稳定而添加的人工粘性项.

对(3)式差分展开，整理可得

$$A\delta\hat{U}_{i-1,j}^{n+1}+B\delta\hat{U}_{i,j-1}^{n+1}+C\delta\hat{U}_{i,j}^{n+1}+D\delta\hat{U}_{i,j+1}^{n+1}+E\delta\hat{U}_{i+1,j}^{n+1}=\Delta\hat{U}_{i,j}^{n}. \tag{4}$$

为了提高精度，在显式部分 $\Delta\hat{U}^{n}$ 的计算，$\hat{F}^{+},\hat{F}^{-},\hat{G}^{+},\hat{G}^{-}$ 采用二阶精度的迎风格式，对粘性项采用中心差分.

对(4)式隐式部分 $\delta\hat{U}^{n+1}$ 的求解，可在 i 站上沿 η 方向用追赶法直接解，从而提高了求解的效率，减少了计算量.

这样在格式构造中没有二阶数值耗散、也未加入任何人工粘性，因此该方法精度较高，同时避免了近似因子分解和繁杂的矩阵运算，稳定性好、收敛也较快.

根据模型方程的稳定性分析及方程组的特征理论，式中 λ 取下述各式时，(4)式是无条件收敛的：

$$\lambda_{\xi}^{+}=\max\{\tilde{u}+a\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2},0\},\qquad \lambda_{\xi}^{-}=\min\{\tilde{u}-a\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2},0\},$$
$$\lambda_{\eta}^{+}=\max\{\tilde{v}+a\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2},0\},\qquad \lambda_{\eta}^{-}=\min\{\tilde{v}-a\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2},0\},$$
$$\lambda_{r\xi}=\max\left\{\frac{(2\mu+\lambda)}{Re\rho}\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2},\frac{\mu\gamma}{Re\rho Pr}\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}\right\},$$
$$\lambda_{r\eta}=\max\left\{\frac{(2\mu+\lambda)}{Re\rho}\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2},\frac{\mu\gamma}{Re\rho Pr}\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}\right\}.$$

2　算例与分析

算例 1 取自文献[4]中算例 3. 这是一个涡轮动叶栅，在叶片的吸力面尾部有一道激波，来流马赫数 0.327，计算时 *CFL* 数取为 8，图 1 给出了壁面压力分布曲线，从图中可以看出计算值与实验数值点吻合较好，激波捕捉也基本准确.

算例 2 对文献[5]的跨音扩压器流场进行了数值模拟，取压比 p_b/p^*（p_b 是背压，p^* 是进口全压）为 0.722，此时在扩压器内部将产生一道强激波，与湍流边界层相互作用引起上壁面的分离，对此复杂流场进行数值模拟可考查本文提出的隐式矢通量分裂方法对求解复杂流场

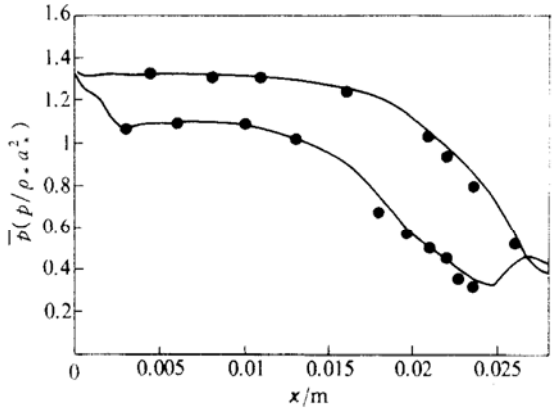


图1 叶型表面压力分布曲线

$\bar{p}$：无量纲压力，P：压力1 Pa，ρ_*：临界密度/kg·m^{-3}，a_*：临界音速/m·s^{-1}. ——示计算值，●示实验数据

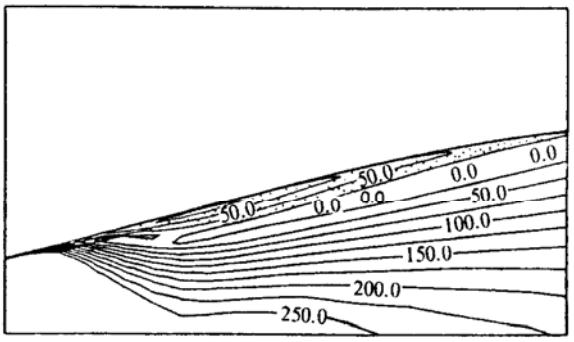


图2 等速度线分布

单位：m·s^{-1}；阴影部分为分离区

问题的有效性和它具有高精度、高分辨率的特点. 图2是计算的等速度线分布，可见在上壁面有一分离区，与文献中实验结果基本相符.

参 考 文 献

1 刘 斌，向一敏. 利用高阶添加项构造原参数气动方程组的差分格式. 工程热物理学报，1994，15(1)：25～30

2 刘 仪，潘 勇，秦光远等. 一种NAVIER-STOKES方程组的隐格式构造及跨音扩压器流场的数值模拟. 见：全国水动力学研讨会文集. 北京：海洋出版社，1995

3 Steger J L, Warming R F. Flux vector splitting of the invisid gas-dynamic equations with application to finite difference methods. Journal of Computational Physics, 1981, 40: 263～293

4 张耀科，沈孟育. 求解平面叶栅跨音流动的一个时间相关法计算程序. 数值计算与计算机应用，1987，8(1)：8～18

5 Salmon J T, Bogar T J, Sajben M. Laser velocimeter measurements in unsteady, separated, transonic diffuser flows. AIAA Paper 81-1197, 1981