矩形波导内径向圆盘的理论模型

吴 正 德

（成都电讯工程学院应用研究所）

在矩形波导内插入一径向圆盘很好地解决了低阻抗有源器件与标准矩形波导的匹配问题．七十年代初以来，这种方式就广泛运用于微波和毫米波有源电路，构成了帽结构振荡器和毫米波予调谐模型（PTM）[1]．我们将分析径向圆盘在半无限长矩形波导内的辐射特性，建立它的近似磁壁模型，从而简化某些毫米波振荡器的计算机辅助设计．

在半无限长矩形波导内，含有有源器件的径向圆盘结构如图 1 所示，图中采用了(r, ϕ, z)和(x, y, z')两个坐标系．根据 Love 场等效定律，对波导内径向圆盘辐射特性的研究等效为对有源区 V_1 和无源区 V_2 交界面 S 上虚构的电流和磁流薄层辐射特性的研究．虚构源密度是

$$\bar{J}_e = \bar{n} \times \bar{H}_{\phi 0}, \tag{1}$$

$$\bar{J}_m = \bar{E}_{z0} \times \bar{n}. \tag{2}$$

倘若径向圆盘不是太靠近波导窄壁，由于激励源的圆对称分布，可以假设圆盘下方仅有径向 TEM 模．(1)和(2)式中足标 O 表示 $\bar{E}_z$ 和 $\bar{H}_\phi$ 在 $r = r_0$ 处的值，$\bar{n}$ 垂直 S 向外．对于给定的工作频率和几何尺寸，我们能计算出 S 上单位面积的导纳 y_s[2]．因为

$$\frac{H_{\varphi 0}}{E_{z0}} = -y_s, \tag{3}$$

所以 $\bar{J}_e$ 和 $\bar{J}_m$ 也可以写成

$$\bar{J}_e = -y_s E_{z0} \hat{i}_z, \tag{4}$$

$$\bar{J}_m = E_{z0} \hat{i}_\phi. \tag{5}$$

如果将 $\bar{J}_e$ 和 $\bar{J}_m$ 产生的 TE_{10} 模的电场分量分别用 E_{ye} 和 E_{ym} 表示，则 TE_{10} 模的总电场分量为 $E_y = E_{ye} + E_{ym}$．因为 TE_{10} 模是唯一的传播模，所以 $|E_y|^2$ 能表征径向圆盘的辐射特性．

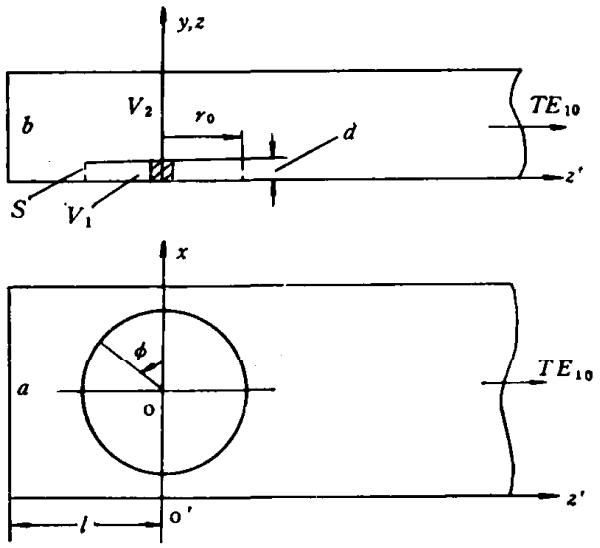

图 1　径向圆盘结构简图

首先研究 $\bar{J}_m$ 向外辐射的 TE_{10} 模．这里引入相对于 $\bar{J}_m$ 的矢量位函数 $\bar{A}_m$，则

$$\bar{E}_m = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times \bar{A}_m, \tag{6}$$

且 $\bar{A}_m$ 满足如下方程

$$\nabla^2 \bar{A}_m + K_0^2 \bar{A}_m = -\varepsilon_0 \bar{J}_m, \tag{7}$$

本文 1987 年 2 月 3 日收到．

由(7)式定义并矢格林函数 $\bar{\bar{G}}_m$ 满足方程

$$\nabla^2\bar{\bar{G}}_m + K_0^2\bar{\bar{G}}_m = -\bar{\bar{I}}\delta(\bar{r} - \bar{r}'), \tag{8}$$

式中 $\bar{r}$ 和 $\bar{r}'$ 分别表示场点和源点. 既然 $\bar{J}_m$ 仅仅存在于 $x - z'$ 平面内,则我们取

$$\bar{\bar{I}} = \hat{i}_x\hat{i}_x + \hat{i}_{z'}\hat{i}_{z'}, \tag{9}$$

$$\bar{\bar{G}}_m = \hat{i}_x G_{mxx}\hat{i}_x + \hat{i}_{z'} G_{mz'z'}\hat{i}_{z'}, \tag{10}$$

所以

$$A_m = -\varepsilon_0 J_m\left[\hat{i}_x\int_{s'} G_{mxx}\sin\phi' ds' + \hat{i}_{z'}\int_{s'} G_{mz'z'}\cos\phi' ds'\right]. \tag{11}$$

应该指出，G_{mxx} 和 $G_{mz'z'}$ 分别是下列方程的解:

$$\begin{cases}\nabla^2 G_{mxx} + K_0^2 G_{mxx} = -\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z' - z''),\\ G_{mxx} = 0, & (x = 0, a)\\ \partial G_{mxx}/\partial y = 0, & (y = 0, b)\\ \partial G_{mxx}/\partial z' = 0, & (z' = -l)\end{cases} \tag{12}$$

和

$$\begin{cases}\nabla^2 G_{mz'z'} + K_0^2 G_{mz'z'} = -\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z' - z''),\\ \partial G_{mz'z'}/\partial x = 0, & (x = 0, a)\\ \partial G_{mz'z'}/\partial y = 0, & (y = 0, b)\\ G_{mz'z'} = 0, & (z' = -l)\end{cases} \tag{13}$$

因此我们得到

$$G_{mxx} = \frac{2}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{0m}}{\Gamma_{nm}}\sin\frac{n\pi x'}{a}\cos\frac{m\pi y'}{b}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\cdot$$
$$e^{-\Gamma_{mnl}}\begin{cases}e^{-\Gamma_{nm}z'}\mathrm{ch}\Gamma_{nm}(z'' + l), & (z' \geqslant z'')\\ e^{-\Gamma_{nm}z''}\mathrm{ch}\Gamma_{nm}(z' + l), & (z' \leqslant z'')\end{cases} \tag{14}$$

和

$$G_{mz'z'} = \frac{1}{ab}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{0n}\varepsilon_{0m}}{\Gamma_{nm}}\cos\frac{n\pi x'}{a}\cos\frac{m\pi y'}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\cdot$$
$$e^{-\Gamma_{nml}}\begin{cases}e^{-\Gamma_{nm}z'}\mathrm{sh}\Gamma_{nm}(z'' + l), & (z' \geqslant z'')\\ e^{-\Gamma_{nm}z''}\mathrm{sh}\Gamma_{nm}(z' + l), & (z' \leqslant z'')\end{cases} \tag{15}$$

式中 $$\Gamma_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - K_0^2,$$

$$\varepsilon_{0n}, \varepsilon_{0m} = \begin{cases}1 & (m = 0 \text{ 或 } n = 0),\\ 2 & (m \neq 0 \text{ 或 } n \neq 0).\end{cases}$$

对于 TE_{10} 模，G_{mxx} 和 $G_{mz'z'}$ 中 $n = 1$，$m = 0$ 和 $\Gamma_{10} = j\beta_{10}$. 利用 (14),(15),(11) 以及(6)式求得 $\bar{J}_m$ 产生的电场分量 E_{ym}

$$E_{ym} = j\frac{2r_0 d}{ab\beta_{10}}E_{s0}e^{-j\beta_{10}l}\left\{\frac{\pi}{a}\int_0^{2\pi}\cos\left[\frac{\pi}{a}\left(\frac{a}{2} + r_0\cos\phi'\right)\right]\right.$$
$$\times\sin[\beta_{10}(l - r_0\sin\phi')]d\phi' - \beta_{10}\int_0^{2\pi}\sin\left[\frac{\pi}{a}\left(\frac{a}{2} + r_0\cos\phi'\right)\right]$$
$$\left.\times\cos[\beta_{10}(l - r_0\cdot\sin\phi')]d\phi'\right\}\sin\frac{\pi x}{a}e^{-j\beta_{10}z}. \tag{16}$$

其次引入与 $\bar{J}_e$ 有关的 $\bar{A}_e$ 来研究 $\bar{J}_e$ 的辐射. 我们有

$$\bar{B}_e = \nabla \times \bar{A}_e, \tag{17}$$

$$\bar{E}_e = -j\omega\bar{A}_e + \frac{\nabla\nabla\cdot\bar{A}_e}{j\omega\mu_0\varepsilon_0}, \tag{18}$$

式中 $\bar{A}_e$ 满足方程

$$\nabla^2\bar{A}_e + K_0^2\bar{A}_e = -\mu_0\bar{J}_e, \tag{19}$$

类似定义并矢格林函数 $\bar{\bar{G}}_e$, 有

$$\nabla^2\bar{\bar{G}}_e + K_0^2\bar{\bar{G}}_e = -\bar{\bar{I}}\delta(\bar{r}-\bar{r}'), \tag{20}$$

因为 $\bar{J}_e$ 仅有沿 $\hat{i}_y$ 的分量,所以取

$$\bar{\bar{I}} = \hat{i}_y\hat{i}_y, \tag{21}$$

$$\bar{\bar{G}}_e = \hat{i}_y G_{eyy}\hat{i}_y, \tag{22}$$

式中 G_{eyy} 是下面方程的解

$$\begin{cases} \nabla^2 G_{eyy} + K_0^2 G_{eyy} = -\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z'-z''), \\ G_{eyy} = 0, \qquad (x=0,\ a) \\ \partial G_{eyy}/\partial y = 0, \qquad (y=0,\ b) \\ G_{eyy} = 0, \qquad (z'=-l) \end{cases} \tag{23}$$

则

$$G_{eyy} = \frac{2}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{0m}}{\Gamma_{nm}}\sin\frac{n\pi x'}{a}\cos\frac{m\pi y'}{b}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\cdot e^{-\Gamma_{nm}l}\begin{cases} e^{-\Gamma_{nm}z'}\mathrm{sh}\Gamma_{nm}(z''+l), & (z'\geqslant z'') \\ e^{-\Gamma_{nm}z''}\mathrm{sh}\Gamma_{nm}(z'+l), & (z'\leqslant z'') \end{cases} \tag{24}$$

从而得出 $\bar{J}_e$ 产生的电场分量 E_{ye}

$$E_{ye} = j\frac{2\omega d r_0\mu_0}{ab\beta_{10}}y_s E_{s0}e^{-j\beta_{10}l}\int_0^{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{a}r_0\cos\phi'\right) \times \sin[\beta_{10}(l-r_0\sin\phi')]d\phi'\cdot\sin\frac{\pi x}{a}e^{-j\beta_{10}z'}. \tag{25}$$

下面比较 $\bar{J}_e$ 和 $\bar{J}_m$ 的辐射能力. 直接引用文献[2]中的数据,根据(16)和(25)式计算不同 r_0 的情况下, $|E_{ym}|^2/|E_{ye}|^2$ 随 d 的变化,结果如图 2 所示. 从图可见比值随 d 减小而激巨增加,且 r_0 愈大,变化趋势愈陡. 因此可以得出结论,当 r_0 比 d 大得多时,与 $\bar{J}_m$ 的作用相比可以忽略 $\bar{J}_e$, 即令 $H_{\phi 0}\approx 0$, 从而径向圆盘能用近似磁壁模型表示.

为了验证前面的分析,我们在 5cm 频段进行了一系列实验. 表 1 列出了与 IMPATT 振荡器有关的结果,其中 C 是封装电容和临近击穿时结电容之和; F_0 是实测的工作频率; r_0 和

表 1 5cm 频段的实验结果

No.	X		T		V		W	
$C(pF)$	1.31		1.19		1.12		1.13	
F_0(GHz)	5.572	5.732	5.765	5.947	5.926	6.060	5.765	5.908
d(mm)	2.0	1.8	2.0	1.8	2.0	1.8	2.0	1.8
r_0(mm)	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00
r_{0T}(mm)	14.9928	15.3237	14.8959	13.1475	14.6634	15.1667	15.3865	15.8554

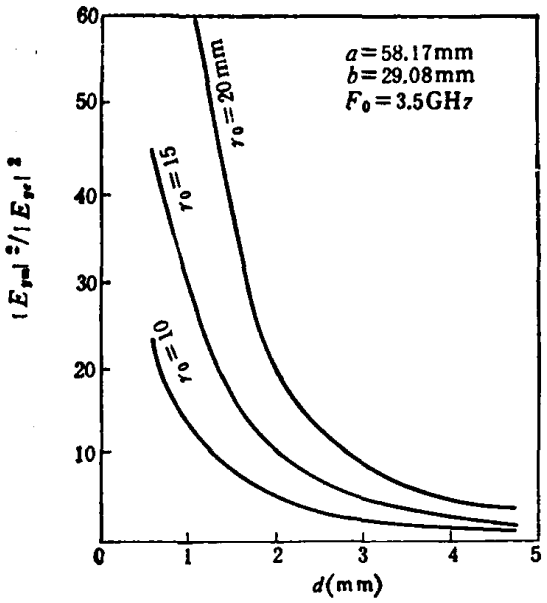

图 2 $|E_{ym}|^2/|E_{ye}|^2$ 随 d 的变化

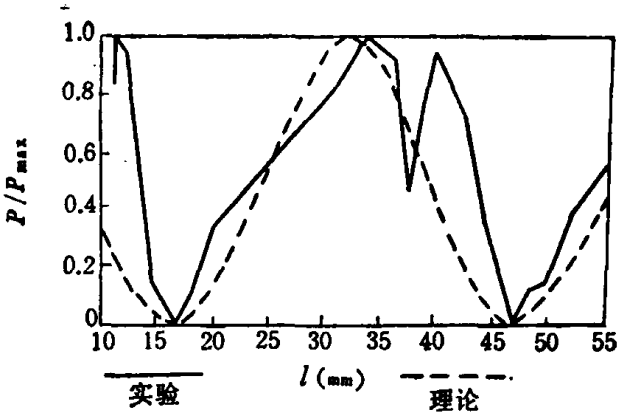

图 3 P/P_{max} 随 l 的变化

d 是实际的结构尺寸. 依据 C, F_0 和 d, 利用径向圆盘的磁壁模型, 同时借助它和地平面上圆盘谐振器的相似性考虑边缘场的影响[3], 计算出理论半径 r_{0T}, 发现 r_0 和 r_{0T} 有良好的一致性.

另外,我们也可以利用磁壁模型上 $\bar{J}_m$ 产生的 $|E_{ym}|^2$ 来表征径向圆盘向外辐射功率. 图 3 给出了 P/P_{max} 的理论曲线 (即 $|E_{ym}|^2/|E_{ym}|^2_{max}$) 与实验曲线, 虽然它们随 l 的变化有一定差异, 但是最大值和最小值几乎出现在相同位置. 这就说明, 利用磁壁模型根据 $|E_{ym}|^2/|E_{ym}|^2_{max}$的计算曲线,能方便地确定振荡器最佳短路位置 l.

我们相信,在毫米波频段内,当 r_0 为 d 的数倍时, 采用径向圆盘的近似磁壁模型, 不仅大大简化了振荡器电路的计算机辅助设计,而且对工程运用具有足够精度.

致谢: 作者对林为干教授的帮助表示谢意.

参 考 文 献

[1] Derycke, A. C. and Georges Salgmer, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-33** (1985), 7: 600—609.
[2] Wu Zheng-de (吴正德), *Electron. Lett.*, **20**(1984), 256—258.
[3] Dernekyd, A. G., *IEEE Trans.*, **AP-27**(1979), 660—664.