9: $D_0 = 1$, $D_1 = 2$, $D_4 = 6$, $D_5 = 18$, $D_9 = 54$, $D_{10} = 162$, $D_{11} = 486$.

致谢 本工作为国家自然科学基金(批准号: 19671048)和高等院校博士点专项科研基金资助项目.

参 考 文 献

1 Etzion T. The depth distribution_A new characterization for linear codes. IEEE Trans Inform Theory, 1997, IT_43(4): 1 361~ 1 363
2 Goka T. An operator on binary sequences. SIAM Rev, 1970, 12: 264~ 266
3 Nathanson M B. Derivatives of binary sequences. SIAM J Appl Math, 1971, 21: 407~ 412
4 Games R A, Chan A H. A fast algorithm for determining the complexity of binary sequences with period p^n. IEEE Trans Inform Theory, 1983, IT_29: 144~ 146
5 Massey J L. Shift registers synthesis and BCH decoding. IEEE Trans Inform Theory, 1969, IT_15: 122~ 127
6 van Lint J H, Wilson R M. A Course in Combinatorics. Cambridge, UK: Cambridge Univ Press, 1992. 291~ 297

(1998-04-20 收稿)

随机变量序列最大部分和之矩的二进估计式及其应用

苏 淳 迟 翔
(中国科学技术大学统计与金融系, 合肥 230026)

摘要 随机变量序列最大部分和之矩的二进估计思想未能引起人们足够的重视, 针对这一奇怪现象, 我们将此思想普遍化为一种可广为应用的二进制估计方法, 并作为应用, 用之改写了前人的一些结果, 昭示了其威力.

关键词 任一随机变量序列 最大部分和 矩 二进制估计式

设N 为自然数之集, $\overline{\mathrm{N}} = \mathrm{N} \cup \{0\}$, $\{X_j,\ j \in \mathrm{N}\}$为随机变量序列. 对 $a \in \overline{\mathrm{N}}$, $n \in \mathrm{N}$, 记

$$S_{a,\ n} = \sum_{j=1}^{n} X_{a+j},\quad M_{a,\ n} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_{a,\ k}|. \tag{1}$$

如果对 $v \geqslant 1$, 有

$$\beta_v = \sup_j E|X_j|^v < \infty, \tag{2}$$

那么一般来说较易得到 $E|S_{a,\ n}|^v$ 的某种上界估计. 而在对$\{X_j,\ j \in \mathrm{N}\}$无任何进一步假定的情况下, 若想获得 $EM^v_{a,\ n}$的较好上界估计则确非易事.

Menchoff[1], Stout[2], Serfling[3] 和 Moricz[4] 都讨论过这个问题. 本文在文献[1, 4]的基础上, 给出 $EM^v_{a,\ n}$的一种二进估计式. 这种估计式具有简洁易估的特点, 且有较大的应用范围. 作为应用, 将用之改进文献[2~ 4]中的有关结果.

1 最大部分和之矩的二进估计式

本文中的对数均以 2 为底. 我们的结论是:

定理 1 对 $v \geqslant 1$, 有

$$EM_{a,n}^{v} \leqslant \left| \sum_{i=1}^{[\log n]} \left| \sum_{Z \in A_i} E|Z|^{v} \right|^{1/v} \right|^{v}, \tag{3}$$

其中$[u]$表示不超过实数 u 的最大整数, 而

$$A_i = \{Z \mid Z = S_{a+(j-1)2^i,\ 2^i},\ j = 1, \cdots, [n2^{-i}]\},\ i = 0, 1, \cdots, [\log n]. \tag{4}$$

证 记 $m = [\log n]$, 则有 $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$. 对 $k \in \mathrm{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 写出其二进制表达式

$$k = \sum_{i=0}^{m} \delta_i \cdot 2^{m-i},$$

其中 $\delta_i = 0$ 或 1, $i = 0, 1, \cdots, m$. 再令

$$k_0 = a,\ k_i = a + \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j \cdot 2^{m-j},\ i = 1, 2, \cdots, m+1;$$

$$Y_i^{(k)} = S_{k_i,\ k_{i+1}-k_i} = S_{k_i,\ \delta_i \cdot 2^{m-i}},\ i = 0, 1, \cdots, m.$$

易知, 当 $\delta_i = 0$ 时, $Y_i^{(k)} = 0$; 当 $\delta_i = 1$ 时, $Y_i^{(k)} \in A_{m-i}$. 并且有

$$S_{a,k} = \sum_{i=0}^{m} Y_i^{(k)},$$

$$|S_{a,k}| \leqslant \sum_{i=0}^{m} \max_{Z \in A_{m-i}} |Z| = \sum_{i=0}^{m} \max_{Z \in A_i} |Z|. \tag{5}$$

式(5)的右端与 k 无关, 所以

$$M_{a,n} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_{a,k}| \leqslant \sum_{i=0}^{m} \max_{Z \in A_i} |Z|. \tag{6}$$

当式(3)的右端为 ∞时, 该式自然成立. 当右端有限时, 由于 $v \geqslant 1$, 故由 Minkowski 不等式从式(6)推知

$$(EM_{a,n}^{v})^{1/v} \leqslant \sum_{i=0}^{m} \left| E \max_{Z \in A_i} |Z|^{v} \right|^{1/v} \leqslant \sum_{i=0}^{m} \left| \sum_{Z \in A_i} E|Z|^{v} \right|^{1/v}, \tag{7}$$

在式(7)两端同取 v 次方, 即得式(3).

2 若干应用

利用定理 1 的估计式可以改写文献[2]中的许多定理. 现以其中的定理 3.7.5 为例, 不但可大大简化其证明, 而且还改进了其内容. 我们有

定理 2 设 g 为非降函数, 具有性质

$$0 < 2g(n) \leqslant g(2n),\ \forall n \in \mathrm{N}; \tag{8}$$

设 ψ 为非负函数, 具有性质: 对某 $v > 2$ 和 $0 < \theta < \frac{v}{2} - 1$ 以及 $L \geqslant 1$, 有

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} g^{\theta}(j)\,\psi(j) \leqslant L g^{\theta}(n)\,\psi(n),\ \forall n \in \mathrm{N}. \tag{9}$$

如果对一切 $a \in \overline{\mathrm{N}}$, $n \in \mathrm{N}$, 有

$$E|S_{a,n}|^{v} \leqslant g^{v/2}(n)\,\psi(n), \tag{10}$$

则存在常数 $K = K(v, \theta, L) \geqslant 1$, 使得

$$EM_{a,n}^{v} \leqslant K g^{v/2}(n)\,\psi(n),\ \forall a \in \overline{\mathrm{N}},\ \forall n \in \mathrm{N}. \tag{11}$$

证 令 $\delta=\frac{v}{2}-1-\theta$, 则 $\frac{v}{2}=1+\theta+\delta$. 将式(10)代入(7), 并利用性质(8)和(9), 注意 $m=[\log n]$, 即得

$$
\begin{aligned}
(EM_{a,n}^{v})^{1/v} &\leqslant \sum_{i=0}^{m}([n\cdot 2^{-i}]g^{v/2}(2^i)\psi(2^i))^{1/v}\\
&\leqslant \sum_{i=0}^{m}(n\cdot 2^{-i}\cdot g^{1+\delta}(2^i)g^{\theta}(2^i)\cdot\psi(2^i))^{1/v}\\
&\leqslant L^{1/v}(g^{\theta}(n)\psi(n))^{1/v}\sum_{i=0}^{m}\left|\frac{n}{2^m}(2^{m-i}g(2^i))^{1+\delta}\cdot 2^{(i-m)\delta}\right|^{1/v} \quad (\text{利用式}(9))\\
&\leqslant L^{1/v}(g^{\theta}(n)\psi(n))^{1/v}\sum_{i=0}^{m}\left|2g^{1+\delta}(2^m)\cdot 2^{(i-m)\delta}\right|^{1/v} \quad (\text{利用式}(8))\\
&\leqslant (2L)^{1/v}(g^{v/2}(n)\psi(n))^{1/v}\sum_{i=0}^{m}2^{(i-m)\delta/v}=(Kg^{v/2}(n)\psi(n))^{1/v}, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

其中

$$K=K(v,\theta,L)=2L(1-2^{-\delta/v})^{-v}=2L(1-2^{\frac{1+\theta}{v}-\frac{1}{2}})^{-v}. \qquad (13)$$

注 1 如果 $\psi\equiv 1$, 则有 $\theta=0$, $L=1$, 于是

$$K=K(v)=2(1-2^{\frac{1}{v}-\frac{1}{2}})^{-v}. \qquad (14)$$

将此时的结果与文献[2]中定理 3.7.5 相比较, 有如下两点区别: ( ) 我们取消了文献[2]中的条件

$$\lim_{n\to\infty}g(n)/g(n+1)=1; \qquad (15)$$

( )我们的证明不仅比文献[2]中简洁得多, 而且明确地给出了 $K(v)$, 而文献[2]中的 K_v 却是无法写出的.

作为上述结果的一个直接应用是: 在文献[2]的定理 3.7.6 和推论 3.7.2 中均可取消条件(15).

利用定理 1, 可以极大地拓宽和改进 Serfling[3] 强大数律(见文献[2] p. 204):

定理 3 设 $\{X_j,\ j\in\mathrm{N}\}$ 为随机变量序列, 对某 $v\in(1,2]$ 和一切 $a\in\overline{\mathrm{N}}$, $n\in\mathrm{N}$, 有

$$E|S_{a,n}|^{v}\leqslant g(a,n). \qquad (16)$$

那么只要对某 $p>1$, 有 $c>0$ 使

$$g(a,n)\leqslant cn^{v}\{\log(n+1)(\log\log(n+3))^{p}\}^{-1},\quad \forall a\in\overline{\mathrm{N}},\quad \forall n\in\mathrm{N}, \qquad (17)$$

就有($S_n=S_{0,n}$):

$$S_n/n\to 0\quad \text{a. s.}. \qquad (18)$$

证 令

$$V_k=M_{0,2^{k+1}}=\max_{1\leqslant j\leqslant 2^{k+1}}|S_{0,j}|. \qquad (19)$$

由 Borel_Cantelli 引理易知, 为证式(18), 只需证明对任何给定的 $\varepsilon>0$, 都有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(V_k\geqslant\varepsilon 2^k)<\infty. \qquad (20)$$

以下为简化书写, 把仅与 v 和 ε 有关的常数记作 C, 不细究其具体数值.

记 $2\theta = v - 1$, 即记 $v = 1 + 2\theta$, 再记

$$f(n) = n^{\theta}\{\log(n+1)(\log\log(n+3))^{p}\}^{-1}, \tag{21}$$

易知 $f(n)$ 非降. 将式(16), (17)和(21)代入式(7), 得到

$$(EV_k^v)^{1/v} \leqslant \sum_{i=0}^{k+1}\{C2^{k+1-i}\cdot 2^{i(1+\theta)}f(2^i)\}^{1/v}$$

$$\leqslant (C2^{k+1}f(2^{k+1}))^{1/v}\sum_{i=0}^{k+1}2^{i\theta/v} \leqslant (C(2^{\theta/v}-1)^{-v}2^{(k+1)(\theta+1)}f(2^{k+1}))^{1/v},$$

由 θ 和 f 的定义知, 上式表明

$$EV_k^v \leqslant C2^{(k+1)v}\{(k+1)\log^{p}(k+1)\}^{-1}, \tag{22}$$

其中 C 仅与 v 有关. 因此

$$P(V_k \geqslant \varepsilon 2^k) \leqslant C2^{-kv}EV_k^v \leqslant C(k+1)^{-1}\log^{-p}(k+1),$$

由 $p > 1$, 知式(20)成立.

注 2 与 Serfling 强大数律相比较, 定理 3 与之有如下不同之处: 对 $\beta_v = \sup_j E|X_j|^v$,

( ) Serfling 强大数律仅在 $\beta_2 < \infty$即 $v = 2$ 时才有结论; 我们则把使式(18)成立的矩条件 $\beta_v < \infty$的范围扩展到 $1 < v \leqslant 2$, 从而大大拓宽了其应用范围.

( ) 在 $v = 2$ 时, 也有如下不同之处:

a) Serfling 要求 $g(a, n)$ 有"超可加性"(见文献[2] p. 204), 即对 $\forall a \in \overline{\mathrm{N}}$, $\forall k, l \in \mathrm{N}$, 有

$$g(a,k) + g(a+k,l) \leqslant g(a,k+l), \tag{23}$$

我们取消了这一要求.

b) Serfling 要求

$$g(a,n) \leqslant Cn^2(\log(n+1)\log\log(n+3))^{-2}, \tag{24}$$

这与 $v = 2$ 时的式(17)相比, 限制要严不少.

c) Serfling 的证明要复杂得多, 其中不乏高超的技巧, 而在我们的二进估计方法之下, 一切处理起来都很简单方便.

利用我们的定理 1, 还容易得出如下结果:

定理 4 设函数 $g(a, n)$ 对一切 $a \in \overline{\mathrm{N}}$, $n \in \mathrm{N}$ 有定义, 且满足"超可加性"式(23); $\lambda(n)$ 是对一切 $n \in \mathrm{N}$ 有定义的非负函数. 如果对一切 $a \in \overline{\mathrm{N}}$, $n \in \mathrm{N}$, 有

$$E|S_{a,n}|^v \leqslant g(a,n)\lambda^v(n), \tag{25}$$

则对一切 $a \in \overline{\mathrm{N}}$, $n \in \mathrm{N}$, 有

$$EM_{a,n}^v \leqslant g(a,n)\Big|\sum_{i=0}^{[\log n]}\lambda(2^i)\Big|^v. \tag{26}$$

证 将式(25)代入(7), 并利用条件(23)即可.

注 3 与 Moricz[4] 的推论 3 相比较, 我们取消了对于 $\lambda(n)$ 的非降性要求.

总之, 二进估计式是一种估计最大部分和之矩上界的简洁有效办法, 它不仅把许多经典结果的证明变得十分简单, 而且往往还降低了它们的成立条件, 拓宽了其应用范围.

致谢 本工作为国家自然科学基金(批准号: 19671078)和中国科学院特支费资助项目.

参 考 文 献

1 Menchoff D. Sur les series de fonctions orthogales I. Fund Math, 1923, 4: 82~ 105
2 Stout W. Almost Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974
3 Serfling R. Convergence properties of S_n under moment restrictions. Ann Math Statist, 1970, 41: 1 235~ 1 248
4 Moricz F. A general moment ineguality for the maximum of partial sums of single series. Act Sci Math, 1982, 44: 67~ 75

(1997-10-08 收稿)

$E(s^2)$ 最优超饱和设计与 BIB 设计的对等关系

刘民千 张润楚
(南开大学数学系, 天津 300071)

摘要 证明了大小为$(n, m)=(2k+2, t(2k+1))$ ($k\geqslant 2$, $t\geqslant 2$, 且当 k 为偶数时, t 亦为偶数)的 $E(s^2)$ 最优超饱和设计与 BIB 设计的对等关系, 使得可以通过构造 BIB 设计来寻求 $E(s^2)$ 最优的超饱和设计.

关键词 **超饱和设计 区组设计 关联阵 效应稀疏性质**

当一个设计的试验次数不足以同时估计其设计阵的列所代表的所有主效应时, 称这个设计为超饱和设计. 在工业统计试验和其他科学试验中(尤其是初期), 常常需要考查大量的因子, 而由于试验耗时长费用高, 实际上起主导作用的因子比较少, 这样在效应稀疏性质(effect sparsity, 见文献[1])的假定下, 考查者出于经济、高效的考虑, 往往要采用超饱和设计, 通过适当的数据分析方法, 无需估计每个因子的主效应而从大量的因子中筛选出少量重要的因子.

关于超饱和设计的研究, 最早是文献[2]的工作, 他们研究了二水平因子这类设计的构造, 用计算机搜索的方法给出了有关的 7 个超饱和设计表. 由于各种原因, 较长一段时间里这方面工作进展缓慢. 直到近些年, 由于工业统计试验的推动和计算技术的发展, 这类研究又迅速发展. 其中文献[3]提出了一种用 Hadamard 阵折半(HFHM)来构造大小为$(n, m)=(2k+2, 2(2k+1))$的超饱和设计的方法, 文献[4]也提出了利用平衡的不完全区组设计(BIB 设计)构造$(n, m)=(2k+2, 2(2k+1))$的超饱和设计的方法, 而文献[5]则提出了通过对 Hadamard 阵进行行重排来构造$(n, m)=(2k+2, t(2k+1))$(k 为 $\geqslant 3$ 的奇数)的超饱和设计的方法. 受文献[4]的启发, 本文证明了大小为$(n, m)=(2k+2, t(2k+1))$($k\geqslant 2$, $t\geqslant 2$, 且当 k 为偶数时, t 亦为偶数)的 $E(s^2)$ 最优超饱和设计与 BIB 设计的对等关系, 使得我们可以通过构造 BIB 设计来寻求 $E(s^2)$ 最优的超饱和设计.

考虑(n, m) ($m\geqslant n$)的二水平因子超饱和设计阵 X, 其试验次数为 n, 二水平因子列数为 m, 每一个因子列中+ 1 和- 1 的个数各为 $n/2$. 令

$$C^{(n)}=\{(c_1, \cdots, c_n)' \mid c_i=\pm 1,\ i=1, \cdots, n,\ c_1+\cdots+c_n=0\},$$

则 X 可写为$X=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, 其中 $x_j\in C^{(n)}$, $j=1, \cdots, m$. 我们知道, 对任何一设计