非均匀等离子体中磁流体力学间断的稳定性

王　水

（中国科学技术大学，合肥）

在地球磁层、行星际空间以及星际空间中，存在着许多磁流体力学间断结构，例如磁层顶、行星际磁场的扇形边界、I 型彗尾的边界、日球层顶等．很多作者已对这些磁流体力学间断的稳定性作过大量研究[1-3]．在这些研究中，或者将定态场视为分区均匀的[1,2]，或者考虑了过渡区或边界层中基态物理量在间断面法线方向上变化[3]，这些假设都是对真实空间环境的一种近似．实际上，在地球磁层、行星际空间和星际空间中，等离子体密度、速度和磁场都是非均匀的．本文将讨论非均匀等离子体中磁流体力学间断的稳定性问题．

对于不可压缩、理想导电、完全电离的等离子体，可以应用磁流体力学基本方程组：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0, \tag{1}$$

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\right] = -\nabla P + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}), \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0, \tag{5}$$

式中各参量具有通常的意义．若取间断面的法线在 $\boldsymbol{i}_y$ 方向，而其两侧空间中等离子体分别是分层均匀的，则选择合适的坐标系，可将定常态表达为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{V} = V(x)\,\boldsymbol{i}_z,\ \boldsymbol{B} = B(x)\,\boldsymbol{i}_z, \\ &\rho_0 = \rho_0(x),\quad P_0 = P_0(x). \end{aligned} \tag{6}$$

而由方程 (1)—(5)，可将线性化的扰动方程组表达为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{d\rho_0}{dx}u = 0, \tag{7}$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{B}{4\pi}\frac{\partial b_x}{\partial z}, \tag{8}$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial v}{\partial t} + V\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{B}{4\pi}\frac{\partial b_y}{\partial z}, \tag{9}$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial w}{\partial t} + V\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{dV}{dx}u\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{B}{4\pi}\frac{\partial b_z}{\partial z}, \tag{10}$$

本文 1984 年 1 月 14 日收到．

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = B\frac{\partial u}{\partial z} - V\frac{\partial b_x}{\partial z}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = B\frac{\partial v}{\partial z} - V\frac{\partial b_y}{\partial z}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = B\frac{\partial w}{\partial z} - V\frac{\partial b_z}{\partial z} + \frac{dV}{dx}b_x - \frac{dB}{dx}u, \tag{13}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{15}$$

式中 u, v, w 和 b_x, b_y, b_z 分别是扰动速度和扰动磁场的三个分量，ρ 和 P 是扰动密度和压力，而

$$\Phi = P + \frac{b_z B}{4\pi}. \tag{16}$$

若扰动传播方向平行于基态速度 $\boldsymbol{V}$，则每个扰动量皆可写成 $q(x, y)\exp[i(\omega t - kz)]$，即扰动振幅是 x 和 y 两者的函数．将该表达式代入扰动方程组 (7)—(15) 后，可将所有参量全用 Φ 来表示：

$$u = \frac{i}{\alpha\rho_0}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{17}$$

$$v = \frac{i}{\alpha\rho_0}\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \tag{18}$$

$$w = \frac{1}{\alpha k\rho_0}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right), \tag{19}$$

$$b_x = \frac{kB}{i\alpha\omega^*\rho_0}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{20}$$

$$b_y = \frac{kB}{i\alpha\omega^*\rho_0}\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \tag{21}$$

$$b_z = -\frac{B}{\alpha\omega^*\rho_0}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{\alpha\omega^*\rho_0}\left(\frac{dB}{dx} + \frac{kB}{\omega^*}\frac{dV}{dx}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{22}$$

$$\rho = -\frac{1}{\alpha\omega^*\rho_0}\frac{d\rho_0}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{23}$$

$$P = \frac{\omega^*}{\alpha k^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\alpha k}\left(\frac{dV}{dx} + \frac{kB}{4\pi\omega^*\rho_0}\frac{dB}{dx}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{24}$$

式中

$$\omega^* = \omega - kV,\quad \alpha = \omega^* - \frac{k^2V_A^2}{\omega^*},\quad V_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho_0}, \tag{25}$$

而 Φ 遵从下列二阶变系数的偏微分方程

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + f(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - k^2\Phi = 0, \tag{26}$$

式中

$$f(x) = -\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dx} + \frac{2k}{\omega^*}\frac{dV}{dx} + \frac{k^2}{\alpha\omega^*}\frac{dV_A^2}{dx}. \tag{27}$$

方程 (26) 可用分离变量法求解,我们讨论下列几种情况.

1. 间断面两侧空间中等离子体密度非均匀,而速度和磁场为不同的常数值,且取

$$(\rho_0)_{1,2} = a_{1,2}x + b_{1,2}. \tag{28}$$

则令 $\Phi = X(x)Y(y)$ 后,由方程 (26) 得到

$$Y(y) = ce^{\pm my} \tag{29}$$

和 $X(x)$所满足的变系数常微分方程

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{a}{ax+b}\frac{dX}{dx} - (k^2 - m^2)X = 0, \tag{30}$$

式中 a、b、c、m 皆为常数. 作参数变换

$$\zeta = -(ax + b), \tag{31}$$

方程 (30) 将变为零阶 Bessel 方程

$$\frac{d^2X}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dX}{d\zeta} - \frac{1}{a^2}(k^2 - m^2)X = 0, \tag{32}$$

则由 (29) 和 (31) 式、(32) 式得到 Φ 的通解为

$$\Phi = \{A_+J_0[-l(ax + b)] + A_-N_0[-l(ax + b)]\}e^{\pm my}, \tag{33}$$

式中 $l^2 = -\dfrac{k^2 - m^2}{a^2}$. 取间断面位于 $y = 0$ 处,则 (33) 式必须满足下列边界条件: (1) 在 $y \to \pm\infty$ 处解为有限; (2) 在 $y = 0$ 处 Φ 和 b_y 必须连续. 由此得到下列色散关系

$$(B_2\rho_1 + B_1\rho_2)\omega^2 - 2k(B_2\rho_1V_1 + B_1\rho_2V_2)\omega + k^2[B_2\rho_1(V_1^2 - V_{A_1}^2) + B_1\rho_2(V_2^2 - V_{A_2}^2)] = 0. \tag{34}$$

而产生不稳定性的条件是

$$(V_1 - V_2)^2 > \frac{(B_1 + B_2)}{4\pi}\left(\frac{B_1}{\rho_1} + \frac{B_2}{\rho_2}\right). \tag{35}$$

2. 间断面两侧等离子体密度、速度和磁场都是非均匀的. 则方程 (26) 可以分解为方程 (29) 和下列方程

$$\frac{d^2X}{dx^2} + f(x)\frac{dX}{dx} - (k^2 - m^2)X = 0. \tag{36}$$

若 x_i 是方程 $\omega^{*2} - k^2V_A^2 = 0$ 的根,该点即方程 (26) 和 (36) 的奇点. 我们即可在奇点以外区域将函数 $f(x)$ 展开为幂级数形式

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\varepsilon_i}{x - x_i}, \tag{37}$$

方程 (36) 可化为 Sturm-Liouville 型

$$\frac{d}{dx}\left[\pi(x - x_i)^{\varepsilon_i}\frac{dX}{dx}\right] - (k^2 - m^2)\Pi(x - x_i)^{\varepsilon_i}X = 0. \tag{38}$$

作参数变换

$$d\zeta = \frac{dx}{\Pi(x - x_i)^{\varepsilon_i}}, \tag{39}$$

则方程 (38) 改写为

$$\frac{d^2X}{d\zeta^2} - (k^2 - m^2)[\Pi(x - x_i)^{\varepsilon_i}]^2X = 0. \tag{40}$$

在 $\Pi(x-x_i)^{\varepsilon_i}$ 不接近于零时，方程(40)可用 WKB 法近似求解，我们得到

$$X(x) = A_+\Gamma_+ + A_-\Gamma_-, \tag{41}$$

式中 A_+、A_- 为常数，而

$$\Gamma_\pm = [\Pi(x-x_i)^{\varepsilon_i}]^{-\frac{1}{2}}(k^2-m^2)^{-\frac{1}{4}}e^{\pm\sqrt{k^2-m^2}x}. \tag{42}$$

相应的 WKB 解的真实性条件为

$$\left|\frac{1}{\sqrt{k^2-m^2}}\frac{d}{dx}[\ln\Pi(x-x_i)^{\varepsilon_i}]\right| \ll 1. \tag{43}$$

由方程(29)和(41)得到 Φ 的解为

$$\Phi = (A_+\Gamma_+ + A_-\Gamma_-)e^{\pm my}. \tag{44}$$

利用上述边界条件，可以得到与方程(34)相同的色散关系和与方程(35)相同的不稳定性条件.

3. 间断面两侧等离子体密度、速度和磁场都是非均匀的，但在整个空间中 $\alpha \equiv \omega^* - \frac{k^2V_A^2}{\omega^*} = 0$. 该种情况需直接由扰动方程组(7)—(15)来讨论. 不难得到

$$\Phi = P + \frac{b_zB}{4\pi} = 常数, \tag{45}$$

而色散关系为

$$\omega = k(V \pm V_A), \tag{46}$$

这是叠加在基态上沿着 i_z 方向传播的 Alfvén 波. 对于这种扰动，间断面是稳定的.

若在空间中大部分区域 $\alpha \neq 0$，而在有限个位置 $\alpha = 0$，即空间中存在有限个奇点. 那么，在奇点 $x = x_s$（即满足 $\alpha = 0$ 的根 x_s）邻域内，利用(37)式，方程(26)可以近似表达为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \frac{\varepsilon_s}{\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - k^2\Phi = 0, \tag{47}$$

式中 $\xi = x - x_s$. 分离变量后，得到(29)式和另一个常微分方程. 再作变换

$$X = \xi^{-l}W(\xi), \tag{48}$$

式中 $l = \frac{1}{2}(\varepsilon_s - 1)$，则有

$$\frac{d^2W}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dW}{d\xi} - \left(k^2 - m^2 + \frac{l^2}{\xi^2}\right)W = 0, \tag{49}$$

这是 Bessel 方程. 由(49)、(48)和(29)式，即可得到在奇点 $x = x_s$ 邻域内的解

$$\Phi = [A_+(x-x_s)^{-l}J_l(i\sqrt{k^2-m^2}\,x) + A_-(x-x_s)^{-l}N_l(i\sqrt{k^2-m^2}\,x)]e^{\pm my}. \tag{50}$$

进一步利用上述边界条件，仍可得到与方程(34)和(35)相同的色散关系和不稳定性条件.

由以上讨论可以看出，在分层均匀的等离子体中，若非均匀性的方向与间断面平行，对于沿着基态速度方向传播的扰动，其局地的色散关系和不稳定性条件与均匀等离子体的情况相同. 该种情况下非均匀性并不改变磁流体力学间断不稳定性的性质，而仅仅影响扰动的振幅. 对于更为普遍的情况，我们将另文讨论.

参 考 文 献

[1] Lee, L. C., Albano, R. K. and Kan, J. R., *JGR*, **86** (1981), 54.

[2] Pu, Z. Y. and Kivelson, M. G., *JGR*, **88** (1983), 841.

[3] 陈道汉、刘麟仲，中国科学，A辑，1982，5:453.