热传导对太阳风中大尺度涡旋波的影响

王　水　　方励之
（中国科学技术大学）

在文献[1]中，我们提出了关于行星际磁场扇形结构起源的一种新理论，即它们可能是由赤道面上的大尺度涡旋波引起的．按照这种理论，扇形结构不是一种物质流，而是“密度”波；这样，不仅将太阳偶极子基本磁场与行星际磁场扇形结构较好地联系了起来，同时自然地解释了扇形结构随同太阳刚性共旋的观测事实．但是，在文献[1,2]中，我们选用了简化的太阳风一流模式，且未考虑粘滞性、热传导、Alfvén 涨落及非球面膨胀的影响．然而空间探测结果表明，行星际空间中的等离子体并不是等温的，热传导的影响必需考虑，即应当采用包含较为严格的能量方程的太阳风一流模式．

本文主要讨论热传导效应对太阳风中大尺度涡旋波的影响．在仍然略去粘滞性、Alfvén 涨落和非球面膨胀的情况下，基本方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V})=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla P-\nabla\Phi+\frac{1}{4\pi\rho}[(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}], \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}), \tag{3}$$

$$\frac{3}{2}R\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla T\right)=RT\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho\right)-\nabla\cdot\boldsymbol{q}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{q}=-K\nabla T, \tag{5}$$

$$P=\rho RT, \tag{6}$$

式中 R 是气体常数，$\boldsymbol{q}$ 是单位质量气体的热传导通量，K 是稀薄等离子体的热传导系数，其它参数具有与文献[1]中相同的意义．

在讨论偏离基态的扰动问题时，可将任一参量 $x(r,\theta,\varphi,t)$ 写成

$$x(r,\theta,\varphi,t)=x_0(r,\theta)+x_1(r,\theta,\varphi,t), \tag{7}$$

其中基态 $x_0(r,\theta)$ 是定常的 $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$ 和轴对称的 $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}=0\right)$．若我们仅讨论太阳赤道面附近的情况，即 $\theta\approx\frac{\pi}{2}$，则可将基态近似取为[1]

$$\begin{array}{lll}\rho_0(r), & P_0(r), & T_0(r),\\ (V_r)_0=u_0(r), & (V_\theta)_0=0, & (V_\varphi)_0=r\Omega(r),\\ (B_r)_0(r), & (B_\theta)_0=0, & (B_\varphi)_0(r).\end{array} \tag{8}$$

本文 1978 年 12 月 15 日收到．1980 年 11 月 17 日收到修改稿．

而赤道面为一中性片，赤道面两侧的切向磁场分量是不连续的，它们可以表达为

$$(B_r)_0=\begin{cases} B_r, & \theta<\dfrac{\pi}{2}, \\ -B_r, & \dfrac{\pi}{2}<\theta, \end{cases} \qquad (B_\varphi)_0=\begin{cases} -B_\varphi, & \theta<\dfrac{\pi}{2}, \\ B_\varphi, & \dfrac{\pi}{2}<\theta. \end{cases} \tag{9}$$

在这种基态下，由方程 (2)、(4) 和 (5) 不难得到

$$\frac{1}{2}u_0^2+\frac{1}{2}\Omega^2r^2+\frac{5}{2}RT_0+\frac{1}{C_2}r^2q_0+\Phi-\frac{C_1}{4\pi C_2}rB_\varphi=C_5, \tag{10}$$

上式就是考虑到热传导、转动和磁场影响的能量方程，式中 C_1、C_2、C_5 皆为积分常数，q_0 可以表达为

$$q_0=-K\frac{dT_0}{dr}. \tag{11}$$

由于热传导项 $\frac{1}{C_2}r^2q_0$ 中含有 r^2 因子，因此为了保证在无穷远处收敛，q_0 必需正比于 $r^{-n}(n\geqslant 2)$. 若我们取 $n=2$，且考虑到对于 Lorentz 气体有[3]

$$K=\frac{4.67\times 10^{-12}}{\ln\Lambda}T^{\frac{5}{2}} \qquad (\text{卡/秒}\cdot\text{厘米}\cdot\text{度}), \tag{12}$$

并近似取 $\ln\Lambda\approx 20$，则由 (11) 式得到 $T_0=T_\odot\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^{\frac{2}{7}}$, (13)

式中角标“⊙”表示日冕底部的参数值. 以上证明了基态温度场 $\frac{\partial T_0}{\partial r}\sim\frac{T_0}{r}$；当 $n>2$ 时，该关系依然成立.

在由 (8) 式所表达的基态下，太阳赤道面附近 $\left(\theta\approx\frac{\pi}{2}\right)$ 的线性化扰动方程组可以写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\rho_0u+\rho u_0)+\frac{2}{r}(\rho_0u+\rho u_0)+\frac{\rho_0}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho_0\omega+\rho\Omega_r)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u_0\frac{\partial u}{\partial r}+u\frac{du_0}{dr}+\Omega\frac{\partial u}{\partial\varphi}-2\Omega\omega=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\rho}{\rho_0^2}\frac{dP_0}{dr}+\frac{1}{4\pi\rho_0}\left\{\frac{B_\varphi}{r}\left[\frac{\partial b_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rb_\varphi)\right]-\frac{b_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi)\right\}+\frac{\rho}{4\pi\rho_0^2}\frac{B_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u_0\frac{\partial v}{\partial r}+\Omega\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u_0v}{r}$$
$$=-\frac{1}{\rho_0r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{4\pi\rho_0}\left\{\frac{B_r}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rb_\theta)-\frac{\partial b_r}{\partial\theta}\right]-\frac{B_\varphi}{r}\left(\frac{\partial b_\varphi}{\partial\theta}-\frac{\partial b_\theta}{\partial\varphi}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u_0\frac{\partial w}{\partial r}+u\frac{d}{dr}(\Omega_r)+\Omega\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{u_0w}{r}+u\Omega$$
$$=-\frac{1}{\rho_0r}\frac{\partial P}{\partial\varphi}+\frac{1}{4\pi\rho_0}\left\{-\frac{B_r}{r}\left[\frac{\partial b_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rb_\varphi)\right]+\frac{b_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi)\right\}-\frac{\rho}{4\pi\rho_0^2}\frac{B_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi),$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial t}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(u_0b_\theta-vB_r)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(wB_r+\Omega rb_r-u_0b_\varphi-uB_\varphi)\right],$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial t}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(vB_\varphi-\Omega rb_\theta)-\frac{\partial}{\partial r}(ru_0b_\theta-rvB_r)\right],$$

$$\frac{\partial b_\varphi}{\partial t}=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}[r(wB_r+\Omega rb_r-u_0b_\varphi-uB_\varphi)]-\frac{\partial}{\partial\theta}(vB_\varphi-\Omega rb_\theta)\right\},$$

$$\frac{3}{2}R\rho_0\left[\frac{\partial T}{\partial t}+u_0\frac{\partial T}{\partial r}+u\frac{dT_0}{dr}+\Omega\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right]+\frac{3}{2}Ru_0\frac{dT_0}{dr}\rho$$

$$=RT_0\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_0\frac{\partial\rho}{\partial r}+u\frac{d\rho_0}{dr}+\Omega\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right]+Ru_0\frac{d\rho_0}{dr}T$$

$$+K\left(\frac{\partial^2T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{dK}{dr}\frac{\partial T}{\partial r},$$

$$P=\rho_0RT+RT_0\rho, \tag{14}$$

式中 (u, v, w) 和 $(b_r, b_\theta, b_\varphi)$ 分别为速度和磁场扰动量的三个分量，而且省略了 B_r 和 B_φ 的角标“0”及 P, ρ, T 的角标“1”.

对于扰动量取涡旋波形式的解

$$x_1(r,\theta,\varphi,t)=\hat{x}_1(r,\theta)\exp[i(\omega t-kr-m\varphi)], \tag{15}$$

在紧卷近似下，$|kr|\gg1$，又考虑到基态解都满足 $\frac{dx_0}{dr}\sim\frac{x_0}{r}$，则扰动方程组 (14) 简化为

$$iv\hat{\rho}-ik\rho_0\hat{u}+\frac{\rho_0}{r}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\theta}=0, \tag{16}$$

$$iv\hat{u}-2\Omega\hat{w}=ikR\hat{T}+ik\frac{RT_0}{\rho_0}\hat{\rho}+ik\frac{B_\varphi}{4\pi\rho_0}\hat{b}_\varphi, \tag{17}$$

$$iv\hat{v}=-\frac{R}{r}\frac{\partial\hat{T}}{\partial\theta}-\frac{RT_0}{\rho_0r}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\theta}-ik\frac{B_r}{4\pi\rho_0}\hat{b}_0-\frac{B_r}{4\pi\rho_0r}\frac{\partial\hat{b}r}{\partial\theta}-\frac{B_\varphi}{4\pi\rho_0r}\frac{\partial\hat{b}_\varphi}{\partial\theta}, \tag{18}$$

$$iv\hat{w}=-ik\frac{B_r}{4\pi\rho_0}\hat{b}_\varphi, \tag{19}$$

$$i(\omega-m\Omega)\hat{b}_r=\frac{u_0}{r}\frac{\partial\hat{b}_\theta}{\partial\theta}-\frac{B_r}{r}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\theta}, \tag{20}$$

$$iv\hat{b}_\theta=-ikB_r\hat{v}, \tag{21}$$

$$i(\omega-ku_0)\hat{b}_\varphi=-ikB_r\hat{w}-ik\Omega r\hat{b}_r+ikB_\varphi\hat{u}-\frac{B_\varphi}{r}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\theta}+\Omega\frac{\partial\hat{b}_\theta}{\partial\theta}, \tag{22}$$

$$iv\frac{3}{2}R\rho_0\hat{T}=ivRT_0\hat{\rho}-Kk^2\hat{T}, \tag{23}$$

式中

$$v=\omega-\Omega m-ku_0. \tag{24}$$

由 (16)—(23) 式，考虑到在 $r\gg R_\odot$ 处 $\omega\gg m\Omega$，可以近似求得

$$\hat{b}_r=-\frac{B_r}{ivr}\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial\theta}\right),\qquad\hat{b}_\theta=-\frac{kB_r}{v}\hat{v},$$

$$\hat{b}_\varphi=\frac{ivB_\varphi}{\left[(v^2-k^2u_r^2-k^2u_\varphi^2)-k^2RT_0\left(1-\frac{k^2u_r^2}{v^2}\right)\left(1+\frac{1}{\frac{3}{2}-it}\right)\right]r}\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial\theta}\right),$$

$$\hat{u}=\frac{v}{kB_\varphi}\left(1-\frac{k^2u_r^2}{v^2}\right)\hat{b}_\varphi+\frac{1}{ikr}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\right), \tag{25}$$

$$\hat{w}=-\frac{kB_r}{v4\pi\rho_0}\hat{b}_\varphi,\quad \hat{\rho}=\frac{\rho_0}{B_\varphi}\left(1-\frac{k^2u_r^2}{v^2}\right)\hat{b}_\varphi,\quad \hat{T}=\frac{T_0}{B_\varphi}\left(1-\frac{k^2u_r^2}{v^2}\right)\left(\frac{1}{\frac{3}{2}-it}\right)\hat{b}_\varphi,$$

式中 $$u_r^2=\frac{B_r^2}{4\pi\rho_0},\qquad u_\varphi^2=\frac{B_\varphi^2}{4\pi\rho_0},\qquad t=\frac{Kk^2}{vR\rho_0}. \tag{26}$$

另外，两侧的扰动解在扰动面上要满足 Rankine-Hugoniot 条件[4]

$$[\rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}]=0, \tag{27}$$

$$\left[\rho\boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n})+\left(P+\frac{B^2}{8\pi}\right)\boldsymbol{n}-\frac{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{B}}{4\pi}\right]=0, \tag{28}$$

$$\left[(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n})\left(\rho I+\frac{1}{2}\rho U^2+\frac{B^2}{8\pi}\right)+(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n})\left(P+\frac{B^2}{8\pi}\right)-\frac{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U})}{4\pi}\right]=0, \tag{29}$$

$$[\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}]=0, \tag{30}$$

$$[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{U})]=0, \tag{31}$$

式中 [ ] 表示扰动面两侧的差值，$\boldsymbol{n}$ 是扰动面的单位法向矢量，$\boldsymbol{U}$ 是行星际介质相对于扰动面的速度（在紧卷近似下，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{v}-\frac{\omega}{k}\boldsymbol{i}_r$），$I$ 表示内能.

由文献 [2] 的分析知道，在扰动面上满足

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{U}=0. \tag{32}$$

因此，条件 (27)、(29)—(31) 都是满足的，而由 (28) 式得到

$$\rho_0RT+RT_0\rho+\frac{1}{4\pi}(B_rb_r+B_\varphi b_\varphi)=0. \tag{33}$$

由 (18)、(21) 和 (33) 式可以证明存在下列的解

$$v^2-k^2u_r^2=0, \tag{34}$$

此即文献 [1,2] 中所得到的涡旋波色散方程. 从上可以看出，在考虑到热传导的影响后，文献 [1] 中导出的太阳风中大尺度涡旋波的基本特征并不改变，且涡旋波的色散关系完全相同.

致谢：感谢审稿人提出的有益意见.

参 考 文 献

[1] Wang Shui & Fang Lizhi, *Scientia Sinica*, **22**(1979), 1056.
[2] Fang Lizhi, Hu Youqiu & Wang Shui, *Kexue Tongbao*, **25**(1980), 227.
[3] Spitzer, Jr. L., *Physics of Fully Ionized Gases*, New York, 1962.
[4] Boyd, T. J. M. & Sanderson, J. J., *Plasma Dynamics*, London, 1969.