矩限制的随机变量加权和的收敛速度及其在回归模型中的应用

朱力行　　成平

（安徽大学数学系，合肥）　（中国科学院系统科学研究所，北京）

随机变量加权和的收敛问题表述如下：如果 $\{\varepsilon_n,\ n\geqslant 1\}$ 是一列随机变量，$\{a_n,\ n\geqslant 1\}$ 是常数列．记

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i.$$

则我们希望寻找相应的收敛因子 A_n，使得

$$\frac{|S_n|}{A_n}\to 0\quad \text{a. s.}$$

在本文中，我们讨论了这个问题，得到 A_n 理想的收敛速度．所得的速度达到了古典强大数律的水平，即达到了下限．归纳为四个定理．同时，我们利用以往的结果[1]和这里的结论，讨论回归模型中误差方差估计的强收敛速度，也得到了较为满意的结果，它对以往几乎所有这方面的结果[1-3]进行了统一处理．并且有一些拓广，说明了我们得到的速度达到了下限．这项结果将用定理 5 表述．

定理 1　令 $\{\varepsilon_n,\ n\geqslant 1\}$ 为随机变量序列，$\sup_n E|\varepsilon_n|^r<\infty$，对某个 $r>0$ 成立．$\{a_n,\ n\geqslant 1\}$ 为常数列．记

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i,\tag{1}$$

$$A_n=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}|a_i|^r, & 0<r\leqslant 2\\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2, & r>2\end{cases}\Big\}\to\infty(n\to\infty)\tag{2}$$

当 $0<r<1$ 时，设 $\{\varepsilon_n,\ n\geqslant 1\}$ 为任意随机变量序列；当 $1\leqslant r\leqslant 2$ 时，设 $\{\varepsilon_n,\ n\geqslant 1\}$ 为鞅差或逆鞅差序列；则对任意的 $\alpha>0$，皆有

$$\limsup_{n\to\infty}|S_n|/[A_n(\log A_n)(\log\log A_n)^{\alpha}]^{1/r}\to 0,\quad \text{a. s.}\tag{3}$$

当 $r>2$ 时，$\{\varepsilon_n,\ n\geqslant 1\}$ 为鞅差序列，

$$\limsup_{n\to\infty}|S_n|/[A_n^{r/2}(\log A_n)(\log\log A_n)^{\alpha}]^{1/r}\to 0,\quad \text{a. s.}\tag{4}$$

对 $\{\varepsilon_n,\ n\geqslant 1\}$ 独立的情形，我们有下面的表述：

本文 1986 年 1 月 21 日收到.

定理 1′ 在定理 1 中，将 $A_n(\log A_n)(\log\log A_n)^\alpha$ 换为

$$B_n = C_n(\log n)\cdots(\log_k n)^\alpha \quad \alpha > 1,\ k > 1,$$
$$\hat{=} C_n d_n,$$

其中

$$C_n = \max_{1\le i\le n}\{i|a_i|^r\}; \qquad \log_k n = \underbrace{\log\log\cdots\log}_{k} n.$$

$\{\varepsilon_n,\ n\ge 1\}$ 独立，其它定义与条件和定理 1 同，则定理 1 的结论仍成立.

定理 2 令 $\{\varepsilon_n,\ n\ge 1\}$ 独立，且存在随机变量 ε，$E|\varepsilon|^r < \infty$ 对某个 $0 < r < 2$，以及存在 $x_0 > 0$，和正整数 n_0，使得

如果 $\{a_n,\ n\ge 1\}$ 满足条件：

i) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$,

或者 ii) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge \rho > 1$，当 $n > n_0$，ρ 为常数，

则有

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n|/A_n^{1/r} \to 0, \quad \text{a. s.}$$

或者

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n|/(A_n(\log A_n))^{1/r} \to 0, \quad \text{a. s.}$$

而若因子 $A_n^{1/r}$，$(A_n(\log A_n))^{1/r}$ 都换为 $C_n^{1/r} = \max_{1\le i\le n}\{i^{1/r}|a_i|\}$ 则对任意的常数列 $\{a_n,\ n\ge 1\}$，也可以得到

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n|/C_n^{1/r} \to 0 \quad \text{a. s.}$$

定理 3 对任意给出的数列 $0 < b_n \nearrow \infty$，$\frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1$，如果

i) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $\liminf_{n\to\infty}\frac{n|a_n|^r}{C_n} > 0$;

或者 ii) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge \rho > 1$，当 $n \ge n_0$,

则都可找到一串 $\{\varepsilon_n,\ n\ge 1\}$ iid，$E|\varepsilon_1|^r < \infty$，使得 $b_n|S_n|/C_n^{1/r} \to 0$ a. s 不成立. 其中 C_n 如定理 1′ 中定义.

定理 4 若定理 3 中假设的 i) 或者 ii) 成立，取 $\tilde{B}_n = B_n/(\log_k^n)^{\alpha-1}$，$B_n$ 如定理 1′ 中定义，则存在相互独立的随机序列 $\{\varepsilon_n,\ n\ge 1\}$，满足 $\sup_n E|\varepsilon_n|^r < \infty$，$r > 0$，$\varepsilon_n$ 关于原点对称，使得

$$|S_n|/\tilde{B}_n^{1/r} \to 0 \quad \text{a. s.} \quad \text{不成立.}$$

应当指出，在很多情况下，$A_n\log A_n(\log\log A_n)^\alpha$ 与 B_n；A_n 或 $A_n\log A_n$ 与 C_n 是同一量级的，例如 $a_n = 1$；$a_n = e^n$ 等等. 定理 3 说明了定理 2 中给出的 a. s 收敛速度已经达到了下限，而定理 4 则说明定理 1 的结果已经达到了相当满意的速度.

我们在上述定理中要求收敛因子趋于无穷大，这仅仅是为了表述简洁，事实上，当 A_n，B_n 有界时，可以得到 $|S_n|/M_n \to 0$，a. s. 对任意 $M_n \nearrow \infty$ 成立.

下面考虑上述结果在回归模型中的应用.

对通常的线性模型.

$$y_i = x_i'\beta + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{5}$$

此处，β 是 P 维参数向量 $x_1, \cdots, x_n, \cdots$ 是 P 维已知向量，$\{\varepsilon_i, i \geqslant 1\}$ 是随机误差序列，满足

$$\begin{cases} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \text{ 独立}, \\ E\varepsilon_i = 0, \ E\varepsilon_i^2 = \sigma^2, \ i = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{6}$$

$X_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $r_n = \operatorname{rank} X_n \leqslant P$, (不妨设 $r_n = P$) $\bar{Y}_n = (y_1, \cdots, y_n)'$. 周知，误差方差估计通常为

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n - r_n}\{\bar{Y}_n'(I - X_n'(X_nX_n')^{-1}X_n)Y_n\}$$

$$= \frac{1}{n - r_n}\left[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 - \sum_{i=1}^{P}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{nik}\varepsilon_k\right)^2\right],$$

我们得到

定理 5 在模型 (5) 中，$\{\varepsilon_i, i \geqslant 1\}$ 满足 (6) 式且存在 $r \geqslant 2$, $\sup_i E|\varepsilon_i|^r < \infty$, 同时，当 $2 \leqslant r < 4$ 时，存在随机变量 ε, $P\{|\varepsilon_i| > x\} \leqslant P\{|\varepsilon| > x\}$. $x > x_0$, 则有

当 $2 \leqslant r < 4$ 时，

$$\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2 = o(n^{\frac{2}{r}-1}),$$

当 $r \geqslant 4$ 时，

$$\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2 = o(n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{2}{r}}(\log\log n)^{\frac{2\alpha}{r}}),$$

对每一个 $\alpha > 1$ 成立.

特别地，当 $\{\varepsilon_i, i \geqslant 1\}$ iid, $r \geqslant 4$ 时，则有

$$P\{\omega: L(\omega) = [-B, B]\} = 1,$$

这里 $B = \sqrt{\operatorname{var}(\varepsilon_1^2)}$; ω 是样本空间中的元素，$L(\omega)$ 是 $\dfrac{n(\hat{\sigma}_n^2(\omega) - \sigma^2)}{\sqrt{2n\log\log n}}$ 的极限点集.

并且在 $2 \leqslant r < 4$ 时速度达到下限，$r \geqslant 4$ 时，所得速度也相当满意了.

参 考 文 献

[1] 朱力行，科学通报，30(1985), 21: 1614—1615.

[2] 苏淳，科学通报，30(1985), 21: 1611－1613.

[3] 陈希孺等，线性模型参数的估计理论，科学出版社，北京，108－120.