一种非交换时频轴向层面摄影变换

刘建才 徐家恺 宁新宝 田 润

(南京大学电子科学与工程系, 南京 210093. E-mail: njuliu@163.com)

摘要 非稳态信号的属性描述需要时域和频域两方面的信息. 但是时间和频率是一对非交换变量, 它们无法在时频平面上组成联合概率密度, 而且由于负值和复值或伪信息等原因, 使得所提出的时频分布会产生一些难以解释的问题. 在时频平面上旋转后通过不同方向的边缘分布得到时频信息. 边缘分布的严格的概率密度解释可以避免所有模糊的阐述. 这类似于电脑轴向断层摄影术(CT 或 CAT). 讨论了它在信号分析和信号检测中的应用, 尤其是在低信噪比信号的检测中, 更体现出了这种变换所具有的优点.

关键词 时频 非交换 层面摄影变换 边缘分布

要完整地描述非稳态信号, 需要结合时域和频域两方面的信息, 在很多被推荐使用的时频分布中[1,2], Wigner-Ville(WV)分布, 是最具使用价值的一个, 它的表达式为

$$W(t,\omega)=\int f\left(t+\frac{u}{2}\right)f^{*}\left(t-\frac{u}{2}\right)\mathrm{e}^{-j\omega u}\mathrm{d}u, \tag{1}$$

其中 $f(t)$ 为解析信号.

WV 分布最有价值之处, 在于它的令人满意的边界条件, 时频移不变和在时频平面具有最小的扩散性. 但是, WV 分布通常情况下会在时域或频域平面上, 在信号或信号的傅里叶变换本应是零的区域产生非零值, 即产生伪信息. 事实上, WV 分布是对信号的一种精确的数学描述, 它可以通过下式逆变换再得到 $f(t)$:

$$f(t)f^{*}(t')=\frac{1}{2\pi}\int W\left(\frac{t+t'}{2},\omega\right)\mathrm{e}^{j\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega. \tag{2}$$

由于存在负值和一些变换中产生的伪信号, 在 WV 分布中检测和识别信号并不容易. 这个问题源自于 t 和 ω 是一组非交换的变量, 它们不可能同时精确地用数学式子表示出来, 因而在时间-频率平面上不存在联合概率密度.

其实, 要描述一个非稳态信号, 我们只需要知道它的时间和频率的信息, 联合概率密度并非必需. 所以, 我们可以用下面的办法来解决. 时间密度 $|f(t)|^2$ 在时间轴上反映了信号的强度, 而频谱密度 $|F(\omega)|^2$ 则在频域坐标上反映了信号的强度. 为了获得所需要的时频信息, 只要通过一个插入到 t 和 ω 中的参数 ξ, 把时间和频率结合到同一个函数 $s_\xi(t,\omega)$ 中. 通过一个变量 s_ξ 来获得信号, 如下式:

$$M(s,\xi)=\left|f(s_\xi)\right|^2, \tag{3}$$

可以简单地将 s_ξ 选作一个线性组合:

$$s=\mu t+\nu\omega, \tag{4}$$

这里, 参数 ξ 即为一个参数对 (μ,ν), 可以将它们确定为

$$\mu=\frac{\cos\theta}{T},\quad \nu=\frac{\sin\theta}{\Omega}, \tag{5}$$

其中, T 和 Ω 是参考时间和参考频率, 可用来对应于待研究的信号.

这样, $M(s,\theta)$ 就是一个插入到 $|f(t)|^2$ 和 $|F(\omega)|^2$ 中间的函数. 可以证明, 它给出了信号的完整描述. 对于每一个 θ, $M(s,\theta)$ 都是严格为正的; 而对于每个 s, 它是一个可靠的概率, 不会引起任何解释上的模糊. 类似的方法被使用在量子力学和量子光学中, 那里的非交换变量对是正交相位对 (a_r,a_i) 和位置动量对 (q,p).

概率函数 $M(s,\theta)$ 可以由Radon Wigner变换[2]的WV分布的映射得到, 也可以直接从信号的特征函数得到 $M(s,\theta)$.

从信号处理中恢复信号或波形函数, 是通过很多个不同的 (μ,ν) 组合, 即相当于在旋转后很多个方向轴上的概率投影得到的, 这很类似于电脑轴向断

2007-02-10 收稿, 2007-03-13 接受

江苏省重点实验室开放基金资助项目(批准号: KJS03078)

层摄影术(CT或CAT)[3]. 它们的不同之处在于CAT扫描涉及到一对位置变量(x, y)是可交换的, 而这里是一对非交换的变量(t,ω), 所以我们称这种方法为非交换时频轴向层面摄影变换, 简称*NCT*变换.

下面, 我们导出了通过特征函数得到*NCT*变换的方法, 并且说明它的一些特性. 也建立起了*NCT*的可逆变换, 以表明这种变换包含了完整的信号信息[4,5]. 由于*NCT*变换包含的是线性信号的绝对值的平方, 所以在实际运算中, 要比类似于WV的双线性的变换简单.

1 *NCT* 变换

因为特征函数的傅里叶变换是个概率密度, 计算变量$s=\mu t+\nu\omega$的边界分布时用到了特征函数法. 时间和频率都可以看作是信号的希尔伯特空间(Hilbert space)的算子, 而且在时间的表示法上, 频率算子可写作$\omega=-j\partial/\partial t$, 特征函数$C(k)$为

$$C(k)=\int f^*(t)\mathrm{e}^{jks}f(t)\mathrm{d}t=\int f^*(t)\mathrm{e}^{jk(\mu t-jv\partial/\partial t)}f(t)\mathrm{d}t. \tag{6}$$

由于要求信号$f(t)$为标准化信号, 所以

$$\int|f(t)|^2\mathrm{d}t=1. \tag{7}$$

特征函数$C(k)$的傅里叶变换如下:

$$M(s,\mu,\nu)=\frac{1}{2\pi}\int C(k)\mathrm{e}^{-jks}\mathrm{d}k, \tag{8}$$

上式经过代数运算之后, 就得到了下面这个重要的公式:

$$M(s,\mu,\nu)=\frac{1}{2\pi|\nu|}\left|\int\exp\left[\frac{j\mu t^2}{2\nu}-\frac{jts}{\nu}\right]f(t)\mathrm{d}t\right|^2. \tag{9}$$

由标准化要求:

$$\int M(s,\mu,\nu)\mathrm{d}s=1, \tag{10}$$

当$\mu=1$, $\nu=0$时, 解析信号的$M(s,\mu,\nu)$在时域为

$$M(t,\ 1,\ 0)=|f(t)|^2, \tag{11}$$

当$\mu=0$, $\nu=1$时, 解析信号的$M(s,\mu,\nu)$在频域为

$$M(\omega,\ 0,\ 1)=|F(\omega)|^2. \tag{12}$$

显然, 这里的边界描述$M(s,\mu,\nu)$包含了解析信号$f(t)$的完整信息.

这里, 更具有意义的是$M(s,\mu,\nu)$与 WV 分布之间的可逆变换对:

$$M(s,\mu,\nu)=\int\exp[-jk(s-\mu t-\nu\omega)]\times W(t,\omega)\times\frac{\mathrm{d}k\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t}{(2\pi)^2}, \tag{13}$$

$$W(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int M(s,\mu,\nu)\exp[-j(\mu t+\nu\omega-s)]\,\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu\mathrm{d}s, \tag{14}$$

通过(1)和(2)式, 我们知道 WV 具有完整的$f(t)$的信息, 所以通过$M(s,\mu,\nu)$可以得到完整的$f(t)$.

2 举例

我们可以计算一些解析信号的 *NCT* 变换$M(s,\mu,\nu)$.

(ⅰ) 两个高斯信号的标准化叠加为

$$f(t)=N_s[A_1f_1(t)+A_2f_2(t)], \tag{15}$$

其中的系数A_1和A_2都可以是复数.

$$f_i(t)=N_i\exp[-a_it^2+b_it],\ \ (i=1,\ 2), \tag{16}$$

其中N_i是标准化的系数, 通过$\int|f(t)|^2\mathrm{d}t=1$计算得

$$N_i=\left[\frac{a_i+a_i^*}{\pi}\right]^{\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{1}{8}\frac{(b_i+b_i^*)^2}{a_i+a_i^*}\right], \tag{17}$$

标准化常数为

$$N_s=\left(|A_1|^2+|A_2|^2+2\mathrm{Re}\left[A_1A_2^*\int f_1(t)f_2^*(t)\,\mathrm{d}t\right]\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

通过(9)式计算$M(s,\mu,\nu)$, 得到包括交叉项在内的 3 个高斯项组合的 *NCT* 变换:

$$M(s,\mu,\nu)=N_s^2\left\{|A_1|^2M_1(s,\mu,\nu)+|A_2|^2M_2(s,\mu,\nu)+2\mathrm{Re}[A_1A_2^*M_{12}(s,\mu,\nu)]\right\}, \tag{19}$$

(ⅱ) 有限时间信号:

$$f_i(t)=N_i\mathrm{e}^{-a_it^2+b_it},\ (t_{2i}<t<t_{1i},\ \ i=1,\ 2), \tag{20}$$

这里的信号$f_i(t)$在$t_{2i}<t<t_{1i}$范围以外都为 0, 参数a_i和b_i是复数. 可以计算单个$f_i(t)$信号的 *NCT* 变换, 也可以计算两个$f_i(t)$信号叠加以后的 *NCT* 变换.

标准化常数为

$$N_i=\sqrt{a_i+a_i^*}\exp\left[-\frac{(b_i+b_i^*)^2}{4(a_i+a_i^*)}\right]\times\left|\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[erfc\left(\sqrt{a_i+a_i^*}\left[t_{2i}-\frac{b_i+b_i^*}{2(a_i+a_i^*)}\right]\right)-erfc\left(\sqrt{a_i+a_i^*}\left[t_{1i}-\frac{b_i+b_i^*}{2(a_i+a_i^*)}\right]\right)\right]\right|^{-1/2},(i=1,\ 2), \tag{21}$$

其中 *erfc* 函数为

$$erfc(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_y^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x, \tag{22}$$

仍然通过前面的公式(9), 我们计算得到:

$$M_i(s,\mu,\nu)=\frac{N_i^2}{8|\nu|}\left|erfc\left(\sqrt{a_i-\frac{j\mu}{2\nu}}\left[t_{2i}-\frac{\nu b_i-js}{2\nu a_i-j\mu}\right]\right)-erfc\left(\sqrt{a_i-\frac{j\mu}{2\nu}}\left[t_{1i}-\frac{\nu b_i-js}{2\nu a_i-j\mu}\right]\right)\right|^2,\ (i=1,\ 2), \tag{23}$$

当 $a_i=0,\ b_i=j\omega_i$ 时, 上式转化为一个有限区间内的正弦信号, 由(7)式, 此时的标准化常数为有限值:

$$N_i\to(t_{2i}-t_{1i})^{-1/2},\ (i=1,\ 2), \tag{24}$$

两个有限时间信号的叠加为

$$f(t)=N_s\{A_1f_1(t)+A_2f_2(t)\}, \tag{25}$$

其中 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 具有与(20)式相同的形式.

叠加信号的边缘分布 $M(s,\mu,\nu)$ 具有和(19)式相同的形式.

(iii) 图形示例. 在下面的这些例子中, 我们都设 $\mu=\dfrac{\cos\theta}{T}$, $\nu=\dfrac{\sin\theta}{\Omega}$, 而取其中的 $T=1$, $\Omega=10$. 所有的信号都是有限时间信号, 通过 Matlab 程序, 我们对每一个信号都绘出 $M(s,\mu,\nu)$ 的一个立体图形和一个等高线图形.

例 **1**

$$f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-j20t}+\mathrm{e}^{j10t}, & t\in(0,\ 1),\\ 0, & t\notin(0,\ 1).\end{cases} \tag{26}$$

例 **2**

$$f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-j20t}, & t\in\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right),\\ 0, & t\in\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}\right),\\ \mathrm{e}^{j10t}, & t\in\left(\dfrac{3}{4},\ 1\right).\end{cases} \tag{27}$$

可以看出, 图 2 的山峰较图 1 的山峰低, 主要由于它的积分区间小而且分散, 所以此时相对较难得到要分辨的信号.

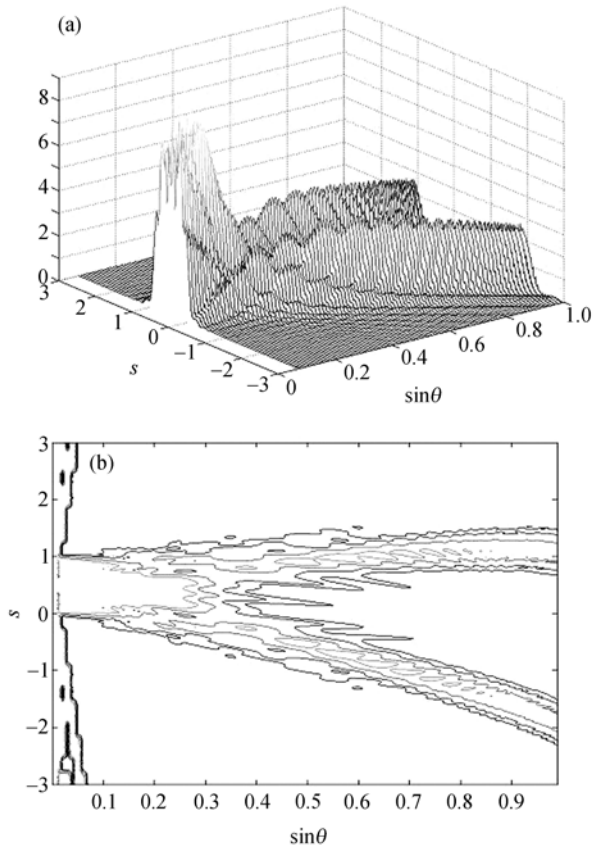


图 1　(26)式中信号的 *NCT* 变换立体图(a)和等高线图(b)

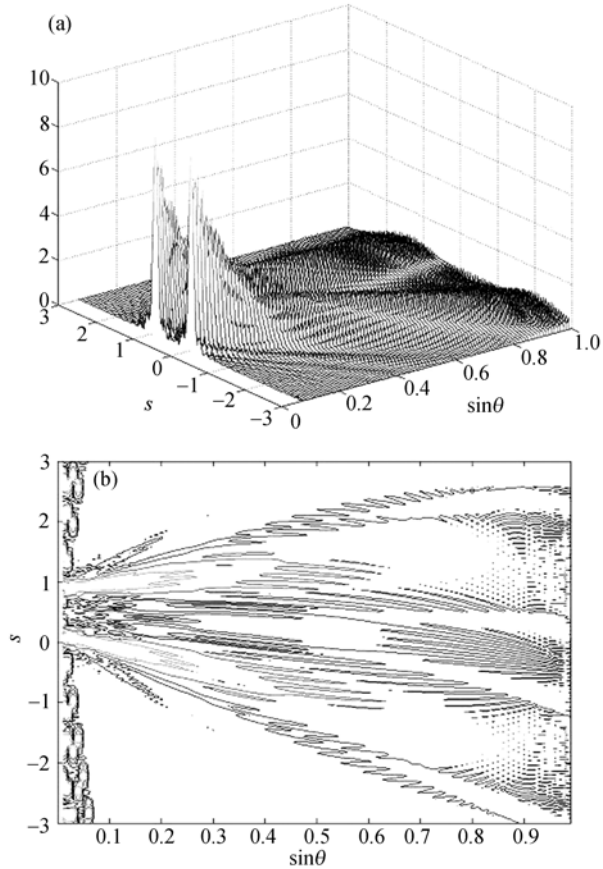


图 2　(27)式中信号的 *NCT* 变换立体图(a)和等高线图(b)

3 利用 *NCT* 变换在噪声中检测信号

在下面的例 4 和 5 中，我们将通过对比看出 *NCT* 变换在低信噪比信号检测中的巨大优势.

我们将一个只出现在时间段 $t\in(0.45,\ 0.55)$ 的正弦信号与一个具有同等平均振幅的振幅和相位都随机的信号叠加，再通过 *NCT* 变换来检测它. 在整个观察的时间段中，信号与噪声的功率比为 1∶10.

例 **3** 在绘图时，选择 *Randn*(*m*, *n*)函数，这样产生的序列的均值为 0. 正弦函数出现在(0.45, 0.55)中，不妨选作 $\mathrm{e}^{-j20\pi t}$. 取

$$f_r = randn(1,\ 201), \tag{28}$$

$$f_0 = \begin{cases} e^{-j20\pi t}, & t\in(0.45,\ 0.55), \\ 0, & t\in(0,\ 0.45)\cup(0.55,\ 1), \end{cases} \tag{29}$$

$$f_{syn} = f_r + f_0, \tag{30}$$

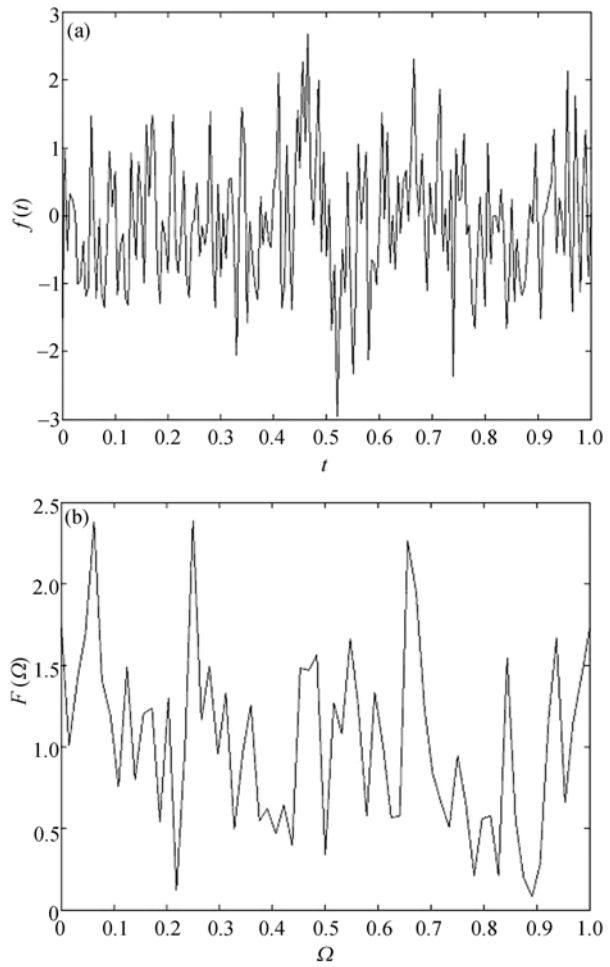


图 3 噪声中信号的时域波形(a)和频域波形(b)

绘出信号 f_{syn}，如图 3，包括时间信号 $f(t)$ 和它的频谱密度 $|F(\omega)|$.

由于信噪比太小，从图 3 中我们很难找到具体的信号在那里. 现在通过 *NCT* 变换来寻找信号，我们选择 $T=1$，$\Omega=1000$，分别得到 *NCT* 变换的立体图(图 4(a))和等高线图(图 4(b)).

观察图 4，虽然图形看起来仍有一些混乱，但是可以清楚地从那些小山峰中，看到一个相连的小山峰序列，而那正是所需要的待检测信号的 *NCT* 变换.

为了更清楚显示这一点，绘出图 5，即没有噪声时的 *NCT* 变换，以便比较. 可以看到无论是否有噪声，山脊的几何形状是完全一样的，由此可以确定图 4 中的小山脊的确是待检测信号的 *NCT* 变换. 因此，尽管在很低的信噪比的情况下，我们检测得到了所需要的信号. 当然，并不仅仅依靠这些小山脊来达到检测的目的，$M(s,\theta)$ 严格的概率解释，才使我们得到了最初的准确的信号.

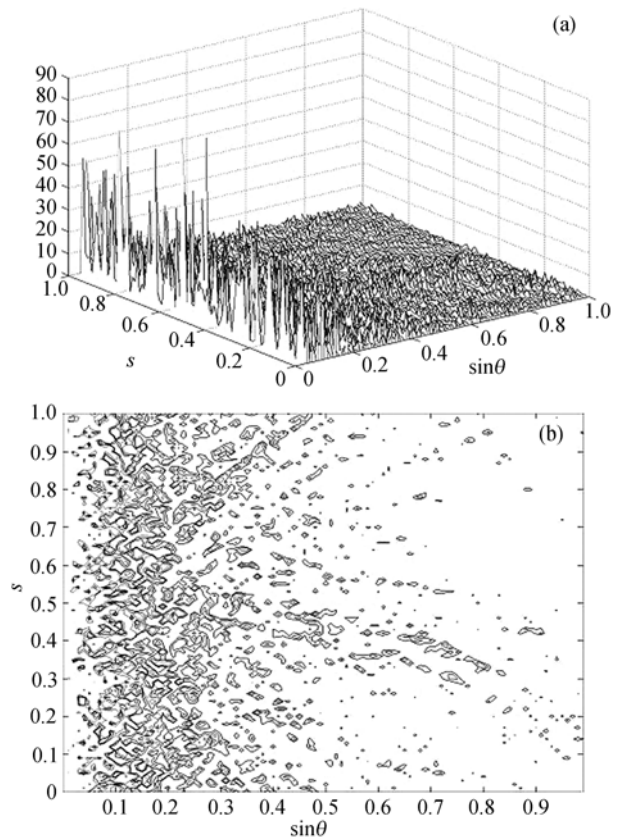


图 4 对噪声中信号作 *NCT* 变换后的立体图(a)和等高线图(b)

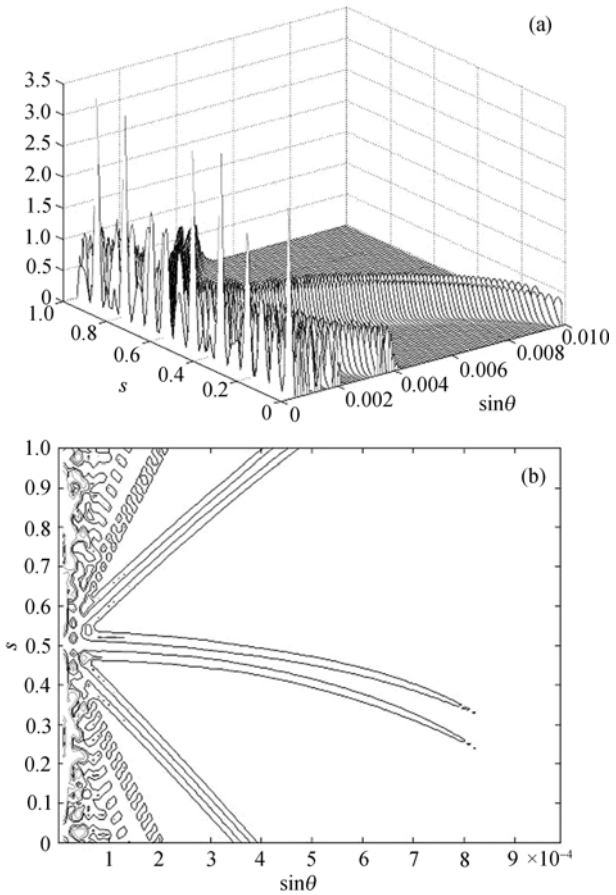


图 5 无噪声信号的 *NCT* 变换立体图(a)和等高线图(b)

各种典型信号所得到的图形是不一样的. 我们可以通过上一节的描述来计算它. 如果能够建立一个详细的信号数据库, 就可以更有效地检测这些信号了.

4 结论

本文中 *NCT* 变换是通过信号的特征函数导出的, 其中 s 是时间和频率变量对 (t,ω) 的线性组合 $\mu t+\nu\omega$. 也可以利用 (t,ω) 其他的非线性函数来替代 $\mu t+\nu\omega$, 只要不在逆变换中丢失原信号的信息.

*NCT*变换具有严格的概率描述, 并且它含有原信号完整的信息 [6]. 由于它是通过线性函数得到的, 所以计算起来要比WV变换那样的双线性变换简单得多. 而且, 这种变换在时频分布上不产生伪信号, 可以很容易地检测得出. 所以这种方法在神经生理学信号的检测领域中极具应用价值. *NCT*很有潜力成为信号分析中一个非常有用的工具.

参 考 文 献

1 Faye B G. Mixed time-frequency signal transformations. In: The Transforms and Applications Handbook. Alabama: Poularikas CRC Press, 1996. 887—962
2 Wood J C, Barry D T. Linear signal synthesis using the Radon-Wigner transform. IEEE Trans Signal Process, 1994, 42: 2105—2111 [DOI]
3 Zhang F, Bi G, Chen Y Q. Tomography time-frequency transform. IEEE Trans Signal Process, 2002, 50: 1289—1297 [DOI]
4 Lohmann A W, Soffer B H. Relationships between the Radon-Wigner and fractional Fourier transforms. J Opt Soc Am A, 1994, 11(6): 1798—1801
5 Shah S I, El-Jaroudi A, Loughlin P J, et al. Signal synthesis and positive time-frequency distributions. J Franklin Inst, 2000, 37: 317—328 [DOI]
6 Carlen E, Vilela M R. Non-commutative space-time and the uncertainty principle. Phys Lett A, 2001, 290: 109—114 [DOI]