关于漩涡星系密度波的演化

解伯民　　巢纪平

（中国科学院力学研究所）　（中国科学院地理研究所）

由林家翘及其合作者在六十年代发展起来的漩涡星系密度波理论[1]，在解释天文观测事实上取得了不少成绩．这个理论的基本观点是认为典型的漩涡星系是一种准稳态的结构，有确定的不随时间变化的图样旋转速度和幅度分布．按这样的假设提炼的数学问题是否严格有解，现在并不清楚[2]．而由于星系的特征时间很长，也难于直接从观测上证实这种假设．从辩证唯物论的观点看来，漩涡星系应该有它自己的发展演化过程，不会长期总是处于某种准稳状态．**“无论什么矛盾，矛盾的诸方面，其发展是不平衡的．有时候似乎势均力敌，然而这只是暂时的和相对的情形，基本的形态则是不平衡．”**本文的目的是在林家翘等人采用过的线性化理论[2]的范畴内，通过数值计算来考察螺旋结构的形成和发展，以便增进对这个复杂问题的了解．

一、基本方程

用连续介质力学的方法来研究漩涡星系的问题时，可把它看成是扁平盘状的旋转流体．取柱坐标$(\hat{r},\theta,\hat{z})$，基本方程是 Euler 方程

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}}+\hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}}+\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta}-\frac{\hat{v}^2}{\hat{r}}=-\frac{\partial}{\partial \hat{r}}(\hat{\phi}+\hat{h}), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}}+\hat{u}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}}+\frac{\hat{v}}{\hat{r}}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \theta}+\frac{\hat{u}\hat{v}}{\hat{r}}=-\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial}{\partial \theta}(\hat{\phi}+\hat{h}), \tag{2}$$

和连续方程

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}}+\frac{\partial}{\hat{r}\partial \hat{r}}(\hat{\rho}\hat{r}\hat{u})+\frac{\partial}{\hat{r}\partial \theta}(\hat{\rho}\hat{v})=0. \tag{3}$$

压力与密度的关系取为：

$$\hat{p}=K\hat{\rho}^{\gamma}\qquad(\gamma>1). \tag{4}$$

各符号的意义是：$\hat{u},\hat{v}$ 是 $\hat{r}$ 和 θ 方向的质点速度，$\hat{t}$ 是时间，$\hat{\phi}$ 是引力势，$\hat{\rho}$ 是星盘面密度，$\hat{p}$ 是压力沿星盘厚度的积分，而

$$\hat{h}\equiv\int\frac{d\hat{p}}{\hat{\rho}}=\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{d\hat{p}}{d\hat{\rho}}\equiv\frac{1}{(\gamma-1)}\hat{a}^2. \tag{5}$$

这里 $\hat{a}$ 代表声速，也可视为恒星的弥散速度．此外还有联系 $\hat{\phi}$ 和 $\hat{\rho}$ 的 Poisson 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2}+\frac{\partial}{\hat{r}\partial \hat{r}}+\frac{\partial^2}{\hat{r}^2\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2}\right)\hat{\phi}=4\pi G\hat{\rho}(\hat{r},\theta,\hat{t})\delta(\hat{z}), \tag{6}$$

本文 1977 年 6 月 12 日收到．

其中G为万有引力常数，$\delta(\hat{z})$代表 Dirac δ 函数.

在线性化的范围内处理问题时，可把星系的螺旋结构看成是在轴对称基本场

$$\hat{\rho}=\rho_0(\hat{r}),\quad \hat{u}=u_0=0,\quad \hat{v}=v_0(\hat{r})=\hat{r}\hat{\Omega}(\hat{r}),\quad \hat{a}=a_0(\hat{r}) \tag{7}$$

($\hat{\Omega}$ 代表较差自转)上叠加的小扰动场 $\rho_1, u_1, v_1, h_1, \psi_1$. 对于扰动场，可将方程(1)—(3)线性化，并假设各量均含有因子 $e^{im\theta}$ (m 为任意正整数，表示旋臂数目)，即得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+im\Omega\right)u-2\Omega v+\frac{\partial}{\partial r}(\psi+h)=0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+im\Omega\right)v+\frac{\varkappa^2}{2\Omega}u+\frac{im}{r}(\psi+h)=0, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+im\Omega\right)\rho+\left(1+\frac{d\ln\rho_0}{d\ln r}\right)\frac{u}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{imv}{r}=0. \tag{10}$$

其中各量皆已无量纲化，特征长度取为 b, 特征速度取为 v_*, 而

$$r=\hat{r}/b,\quad t=v_*\hat{t}/b,\quad \rho=\rho_1/\rho_0,\quad h=h_1/v_*^2,$$
$$\psi=\psi_1/v_*^2,\quad u=u_1/v_*,\quad v=v_1/v_*,\quad \Omega=\hat{\Omega}b/v_*,$$
$$\varkappa=2\Omega\left(1+\frac{r}{2\Omega}\frac{d\Omega}{dr}\right)^{1/2}. \tag{11}$$

又

$$\rho=\frac{v_*^2h}{a_0^2}. \tag{12}$$

对于比较紧卷的螺旋，代替 Poisson 方程可用徐遐生近似关系[3]

$$\rho=\frac{i\sigma}{g}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\psi}{2r}\right), \tag{13}$$

其中 $g(r)=2\pi Gb\rho_0/v_*^2$, σ 对于曳波为 1，对于导波为 -1. (8)—(13) 式是我们的基本方程.

二、数值计算的结果

数值计算时，对于基本场，我们取 Toomre 的一号盘状星系模型[4]，圆周速度为:

$$v_0=\frac{(\hat{r}/b)v_*}{[1+(\hat{r}/b)^2]^{3/4}}, \tag{14}$$

面密度为:

$$\rho_0=\frac{\rho_*}{[1+(\hat{r}/b)^2]^{3/2}},\quad \rho_*=v_*^2/(2\pi Gb). \tag{15}$$

取 $b=5$ 千秒差距，$v_*=400$ 公里/秒，则旋转曲线(14)式与银河系的 Schmidt 模型(1956)相近. 对于基本场内的恒星弥散速度 $a_0(\hat{r})$，我们作如下假定*: 根据一般的看法，漩涡星系是经过长期运转的产物，星盘各处的局部不稳定性已经充分发展，但又因极大尺度运动的不平衡性，又不可能处处都已经十分稳定，Jeans 稳定性判据估计应接近于 1，即

$$q\equiv\frac{\hat{\varkappa}a_0}{\pi G\rho_0}\approx 1\quad(\hat{\varkappa}=\varkappa v_*/b).$$

利用(14)、(15)式，可得

---

* 这种看法是林家翘教授 1976 年访问讲学期间，在讨论中提出的.

$$\frac{a_0(\hat{r})}{v^*}=\frac{q}{2(4+\hat{r}^2)^{1/2}(1+\hat{r}^2)^{1/4}},\tag{16}$$

当 $r=2$，即 $\hat{r}=10$ 千秒差距时，由(16)式可得，$a_0/v_*\cong 0.118q$，如果取 $q=0.9$，则 $a_0\cong 42$ 公里/秒，与银河系观测数据基本符合.

扰动场线性化的基本方程为(8)—(13)，不难证明，它们属于具有两族实特征线的双曲型，由此不难确定合适的差分格式. 计算时取 $q=1$，$m=2$（这对应于实际观测到的两个臂的情形）. 现在来确定边界条件和初始条件. 我们考虑的线性问题实际上是固定的一个谐波分量（$m=2$）的演化问题. 由于星系中心部分呈椭球状，弥散速度大，没有明显的螺旋结构，因此任何旋臂的幅度在星系中心部分都应趋近于零，我们取

$$r=r_0=0.5\text{ 时},\quad \rho=0,\tag{17}$$

相应地应有*

$$\phi|_{r=r_0}=0.\tag{18}$$

计算的空间范围是 $r_0\leqslant r\leqslant\infty$，由于是双曲型方程，在 $r\to\infty$ 时，我们只要求波是向外传播的即可. 为了使空间范围成为有限的，以便于计算，我们把空间自变量改为 $X=1/r$，$0\leqslant X\leqslant 2$. 至于初始条件，由于漩涡星系在现时或过去的速度及密度分布并不清楚，难于确切写出. 但我们可以想象，在盘状星系这样大尺度的自然对象中，涨落现象是很容易发生的，它们会形成大小不同的堆积（Clumps）. 加上较差自转的作用，就会形成拖曳式的片断密度波. 我们可以把"初始时刻"的密度分布取为具有螺旋结构的随机分布. 假设初始时刻已具有一定的螺旋形式，是为了保证在整个计算过程中应用徐遐生近似关系(13)式是合理的. 看起来这似乎是作了过分的限制，其实我们也可以把计算过程中任何时刻的密度（它们具有不同形式的螺旋结构）看成初始分布，而以后的计算结果则是这种分布的演化. 由于我们计算了相当多的情形，由此得到的主要结论应该与初始条件选择的关系不大. 如果令

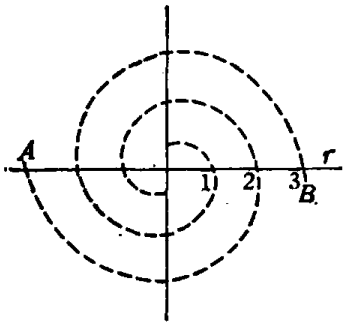

图 1　$t=0$ 的螺旋形式，幅度有正有负

$$\rho_1/\rho_0=\mathrm{Re}(\rho e^{i2\theta})\equiv\mathrm{Re}\{Q(r,t)\exp i2[\theta-\phi(r,t)]\},$$

我们可设

$$\phi(r,t)|_{t=0}=-\pi r,$$

即初始时刻的螺旋形式为：

$$\theta+\pi r=\text{常数}.\tag{19}$$

从一般统计观点考虑，密度大的地方，涨落也应该大，因此我们粗略地取

$$Q_0(r)\equiv Q(r,t)|_{t=0}=0.04(0.5-RN),\tag{20}$$

其中 RN 是计算机中产生(0, 1)区间任何数的均匀随机函数. 由(20)式，$Q_0|_{\min}^{\max}=\pm 0.02$，即初始的最大密度扰动为基本场密度的 ±2%. 至于初始速度扰动，一般地说，由于基本方程

---

* 徐遐生[3]原来求得的扰动密度 ρ_1 与扰动引力势 ϕ_1 的近似关系为：设 $\phi_1=A(\hat{r})\exp[i\int k(\hat{r})d\hat{r}]$，则

$$\rho_1=-\frac{|k|\phi_1}{2\pi G}\left(1-\frac{i}{k\hat{r}}\frac{d\ln(\sqrt{\hat{r}}A)}{d\ln\hat{r}}\right),$$

正文中的(13)式与此式等价. 由此不难看出，根据(17)式应有(18)式. 因此(13)式也可写为

$$\psi=\frac{-iG}{\sqrt{r}}\int_{r_0}^{r}g\rho\sqrt{r}\,dr.$$

的制约，它们会很快地与密度分布相适应，为了简单起见，我们取

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0. \tag{21}$$

计算在 TQ-16 机上进行，X 用均匀步长，$\Delta X = 0.05$. 对于 r，这表示在 ρ_0 大的地方步长短，在 ρ_0 小的地方步长长. 控制计算稳定的条件取熟知的 Courant 条件：

$$\frac{\Delta t}{\Delta r} < \left(\frac{v_*}{a_0}\right)_{\min} \quad 或 \quad \frac{\Delta t}{\Delta X} < \left(\frac{v_*}{a_0 X^2}\right)_{\min}.$$

共计算了十二组不同的随机初始条件，基本趋势没有大的不同，其中 No.3，No.5 可作为典型的情况. 图 1 是假设的初始时刻的螺旋形式，图 2 是初始时刻密度幅度的随机分布，其中的负值表示在这些地方是密度的波谷，按 θ 旋转 $\pm 90°$，则得到相应的波峰，因此这时的密度分布是还没有组织起来的螺旋. 图 3 表示密度波幅度随时间的变化，$t_4 = 10$ 相当于在 $\beta = 10$ 千秒差

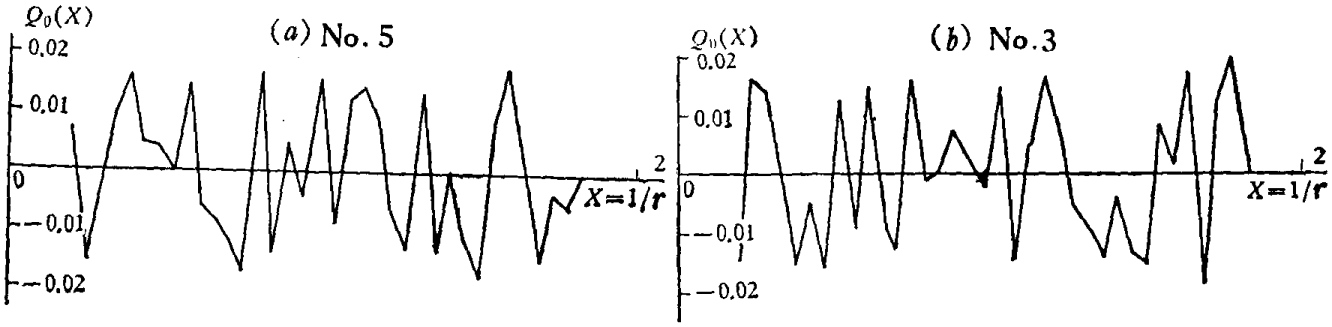

图 2　$t = 0$ 的密度波幅度

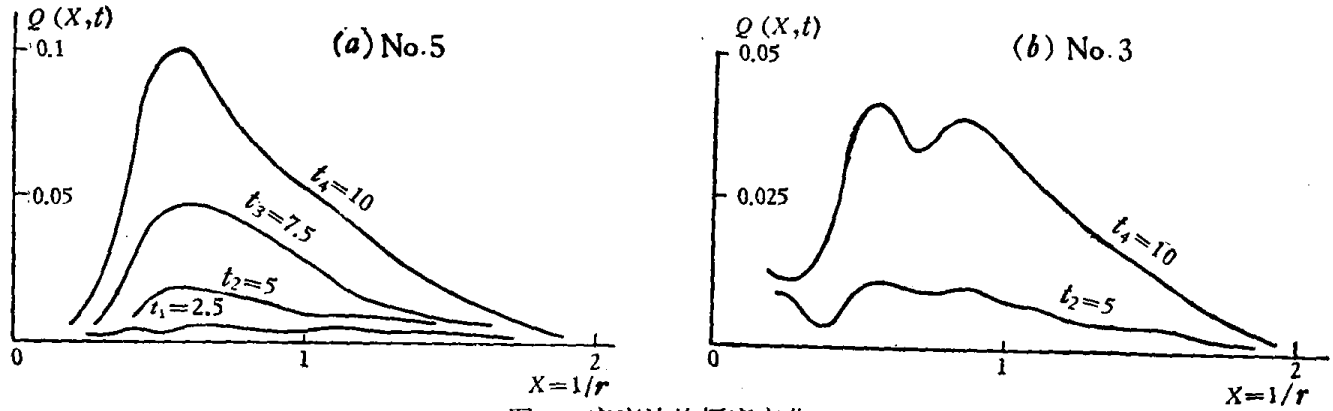

图 3　密度波的幅度变化

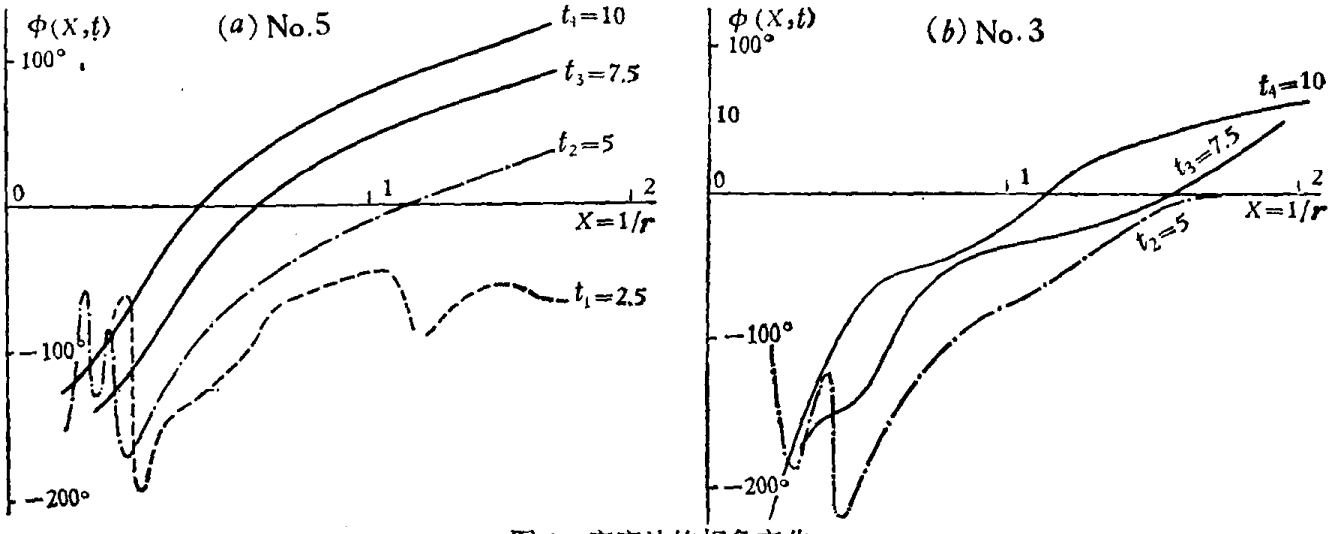

图 4　密度波的相角变化

距处之质点按基本场速度旋转了约 3 弧度. 图 4 是相角随时间的变化，可以看出在 $t_2 = 5$ 时，螺旋密度波已基本上组织起来，只有在 $X < 0.5$，即 $\rho > 10$ 千秒差距以外的部分还有导型的片断，在 $t = t_3$ 以后已形成完整的螺臂. 螺旋图样并不显示"缠卷困难"，而是如林-徐理论那样，以波的形式运动. 根据相角的变化可以算出图样旋转速度 Ω_p，结果画在图 5 中. 从图 5 中

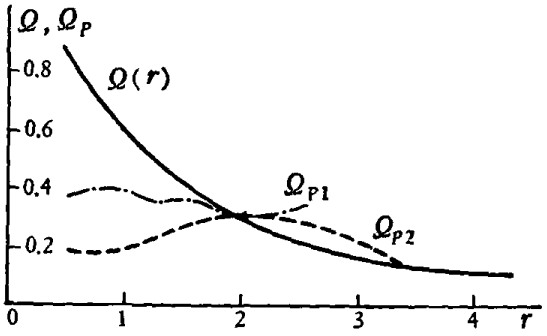

图 5　自转曲线与图样旋转速度 (No.5)

$$\Omega_{p_1} = \frac{\phi(t_3) - \phi(t_2)}{t_3 - t_2} \qquad \Omega_{p_2} = \frac{\phi(t_4) - \phi(t_3)}{t_4 - t_3}$$

可以看出，Ω_p 实际上是 r，t 的函数，在固定时刻，Ω_p 随 r 的变化不大. 共转圈(即 $\Omega_p = \Omega$ 的位置)大约在 $\rho = 10$ 千秒差距处. 从图 3 可知，幅度 ρ_1/ρ_0 随时间增长，在所有计算过的情形中都是如此，有的增长比 No.3, No.5 更快，在 $t = t_4$ 时，ρ_1/ρ_0 的最大值可达25%，这已不是线性理论所能包括的. 因此我们认为在研究螺旋的长期维持和为什么多是双臂结构等问题时，非线性效应可能相当重要，不能忽略. 另外，从本文的计算还可以看到，在盘状星系内，螺旋曳式波是比较容易形成的. 我们已知，在不少漩涡星系中，除了"宏观"结构外，往往还有一些螺旋形曳式片断或"羽毛"，我们觉得这些细部结构可能也是由同样机制产生的，不过它们的年龄可能和主臂不同.

在数值计算工作中，得到计算研究所朱幼兰同志许多帮助，谨致谢意.

参　考　文　献

[1] Lin, C. C., in *Proc. I. A. U. Symp.*, 1970.
[2] Lin. C. C. & Lau, Y. Y., *SIAM. Appl. Math.*, **29** (1975), 352.
[3] Shu, F. H. *Ap. J.*, **160** (1970), 89, papers I and II.
[4] Toomre, A., *Ap. J.*, **138** (1963), 385.

[上接 149 页]

1969, 119—139.
[4] Kobayashi, S., *J. Math. Soc. Japan.*, **19**(1967), 460—480.
[5] Kobayashi, S., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82**(1976), 357—416.
[6] Bergmann, S., *Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables aves les applications à la théorie des fonctions analytiques*, Gauthier-Villars, 1947.
[7] Rund, H., *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer-Verlag, 1959.
[8] Reiffen, H. J., *Math. Ann.*, **161**(1965), 315—324.
[9] Royden, H. C., *Several Complex Variables*, II, Springer Verlag, 1971.
[10] Фукс, Б. А., *Матем. сборн.*, **2** (1967), 569—594.
[11] 华罗庚，数学学报，**4** (1954), 143—170.
[12] 华罗庚，多复变数函数论中典型域的调和分析，科学出版社，1958.
[13] 陆启铿，典型流形与典型域. 上海科技出版社，1963.