# I 积分和弹塑性断裂准则

王 自 强

（中国科学院力学研究所）

## 一、引 言

1951 年在位错理论的研究中 Eshelby[1] 提出了积分形式的能量动量张量的概念. 1968 年 Rice[2,3] 在研究裂纹顶端的弹塑性应力场的过程中，引入了与能量动量张量静分量形式相同的 $J$ 积分. Rice 论证了 $J$ 积分的路径无关性；确立了 $J$ 积分与形变功率之间的关系. 由于 $J$ 积分是裂纹顶端应力场的平均度量，它可以由实验直接测定. 因此，七十年代以来，$J$ 积分作为一个有吸引力的断裂准则，受到了普遍的重视.

但是 $J$ 积分的上述特性都是建立在塑性形变理论基础之上的. 塑性形变理论本质上是非线性弹性理论，它应用的限制条件之一是不允许卸载. 对于实际的塑性材料，塑性应变与加载历史有关，而与应力并没有唯一对应的关系. 与此相应的储藏在单位体元内的应变能也与加载历史有关. 因此，$J$ 积分所包含的应变能密度 $W$ 的含意并不清楚.

另一方面，塑性变形是不可逆的. 因此 $J$ 积分与形变功率之间的关系，不能应用于裂纹扩展过程. 对一个裂纹体加载从而使裂纹在该载荷下扩展，与裂纹先扩展然后再加载，得到的结果是不相同的. 因此，$J$ 积分不能简单地解释为裂纹扩展力，它可以看作是相同载荷条件下，两个具有相近裂纹尺寸的同一物体总势能的比较.

$J$ 积分的这些弱点是众所周知的. Rice 等人曾经试图寻找一个适用于塑性流动理论的与路径无关的积分，但是迄今为止，这种努力没有获得成功.

本文提出了一个与路径无关的新积分. 这个积分名之为 $I$ 积分. $I$ 积分对任何塑性材料，包括用塑性流动理论描述的真实材料，都有明确的定义，并且是一个与积分区域无关的不变积分，它可以作为裂纹顶端弹塑性场的平均度量.

另一方面，$I$ 积分与裂纹扩展力之间有着直接关系，因此，$I$ 积分可以作为弹塑性断裂准则. 从线弹性到全塑性 $I_{1c}$ 都可作为平面应变条件下裂纹起始扩展的断裂准则.

## 二、I 积分的引入

与 $J$ 积分类似的，引入积分

$$L=\int_{\Gamma}\left\{W_c dy-\vec{T}\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}ds\right\},\tag{1}$$

如图 1 所示，$\Gamma$ 是环绕裂纹顶端的一条任意回路.

$\vec{n}$ 是 $\Gamma$ 曲线上任意点的外法线，该点的张力矢量为 $\vec{T}$，$T_i=\sigma_{ij}n_j$. $\vec{u}$ 是位移矢量. $S$ 为 $\Gamma$

本文 1977 年 3 月 15 日收到.

曲线上的弧长．与 $J$ 积分不同的是 $W_e$ 与应力 $\sigma_{ij}$ 唯一对应的弹性应变能密度．

$$W_e=\frac{1}{2}(\sigma_x\cdot\varepsilon_x^e+\sigma_y\cdot\varepsilon_y^e+\tau_{xy}\cdot\gamma_{xy}^e)$$

$$=\frac{(1+\nu)}{2E}\{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\nu(\sigma_x+\sigma_y)^2+2\tau_{xy}^2\},\tag{2}$$

弹性应变 $\varepsilon_x^e$, $\varepsilon_y^e$, $\gamma_{xy}^e$ 与 $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$ 之间的关系可用虎克定律表示

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x^e&=\frac{\partial W_e}{\partial\sigma_x},\\ \varepsilon_y^e&=\frac{\partial W_e}{\partial\sigma_y},\\ \gamma_{xy}^e&=\frac{\partial W_e}{\partial\tau_{xy}};\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

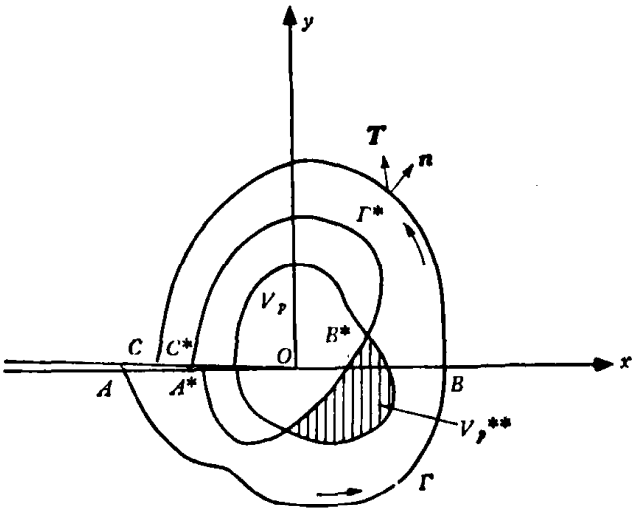


图 1　裂纹体

公式(2)适用于线弹性及普朗特-瑞斯塑性流动理论所描述的材料，对非线性弹性材料，

$$W_e=\int_0^{\varepsilon_{ij}^e}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^e,\tag{4}$$

为了研究 $L$ 积分的性质，研究一个不包含奇点的封闭回路 $C$，沿着封闭回路 $C$，有

$$L_C=\int_C\left\{W_e dy-\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds\right\}=\iint_V\left\{\frac{\partial W_e}{\partial x}-\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x}dxdy\right\},\tag{5}$$

这里 $\sigma_{ij}$ 表示应力张量，$\varepsilon_{ij}$ 表示应变张量．

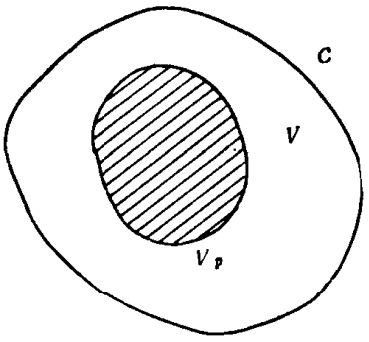


图　2

推导公式(5)时，利用了格林公式、平衡方程及下述虚功原理

$$\int_C\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds=\iint_V\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x}dxdy,\tag{6}$$

利用虎克定律(3)、(4)及复合函数的微分公式得到

$$L_C=\iint_{(V)}\left\{\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^e}{\partial x}-\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x}\right\}dxdy$$

$$=-\iint_V\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}dxdy=-\iint_{V_p}\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}dxdy,\tag{7}$$

$V_p$ 是封闭回路 $C$ 所包围的塑性区，$\varepsilon_{ij}^p$ 是塑性应变张量．根据公式(1)与(7)引入一个新的积分

$$I=\int_\Gamma\left\{W_e dy-\vec{T}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds\right\}+\iint_{(V_p)}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}\right)dxdy,\tag{8}$$

这里 $V_p$ 是 $\Gamma$ 所包含的塑性区．

为了证明 $I$ 积分与选择的路径无关，研究另外的回路 $\Gamma^*$，假设 $V_p^{**}$ 是回路 $\Gamma$ 及回路 $\Gamma^*$ 之间的塑性区，对于封闭回路 $\overline{A^*ABCC^*B^*A^*}$，运用公式(7)得

$$L_{\overline{A^*ABCC^*B^*A^*}}=\oint W_e dy-\vec{T}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds=-\iint_{V_p^{**}}\sigma_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^p}{\partial x}dV,\tag{9}$$

封闭回路 $\overline{A^*}\overline{ABCC^*B^*A^*}=\Gamma-\Gamma^*+\overline{AA^*}+\overline{CC^*}$.

在线段 $\overline{A^*A}$, $\overline{CC^*}$ 上,应力张量 $\vec{T}$ 为零, $dy$ 也等于零,由公式(9)得

$$\int_\Gamma \left(W_e dy - \vec{T}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}ds\right) - \int_{\Gamma^*}\left(W_e dy - \vec{T}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}ds\right) = -\iint\limits_{V_p^{**}} \sigma_{ij}\cdot\frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x}\,dV, \tag{10}$$

进而得到

$$\int_\Gamma \left(W_e dy - \vec{T}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}ds\right) + \iint\limits_{V_p^{**}} \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x}\,dV + \iint\limits_{V_p^{*}} \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x}\,dV = \int_{\Gamma^*}\left(W_e dy - \vec{T}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}ds\right)$$

$$+ \iint\limits_{V_p^{*}} \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x}\,dV, \tag{11}$$

注意到 $V_p = V_p^* + V_p^{**}$, 上式变为

$$\int_\Gamma \left(W_e dy - \vec{T}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}ds\right) + \int_{V_p}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x}\right)dV = \int_{\Gamma^*}\left(W_e dy - \vec{T}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}ds\right)$$

$$+ \int_{V_p^*}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x}\right)dV. \tag{12}$$

公式(12)就表示 $I$ 积分的数值与选择的路径无关.

## 三、$I$ 积分与裂纹扩张力

考察带细长深切口的物体,当切口宽度趋于零时就得到极限情况的裂纹体.

如图 3 所示, 带细长深切口的物体占有面积 $V$, 切口的长度为 $a$、切口的端部为半圆, 切口的宽度等于半圆的直径.

该物体承受外载的边界为 $S_T$, 其余的边界 $S_u$ 上的位移 $\vec{u}$ 预先给定, 设想切口的长度由 $a$ 扩展至 $a+\Delta a$, 此时外载所作的功为

$$\Delta A_T = \int_{S_T} T_i\,(u_i^* - u_i)ds, \tag{13}$$

这里 $u_i^*$ 是切口扩展后的位移分量.

内力所作的功由两部分组成,一部分是带阴影部分 $CEFD$ 区域中内力所作的功, 由于弧

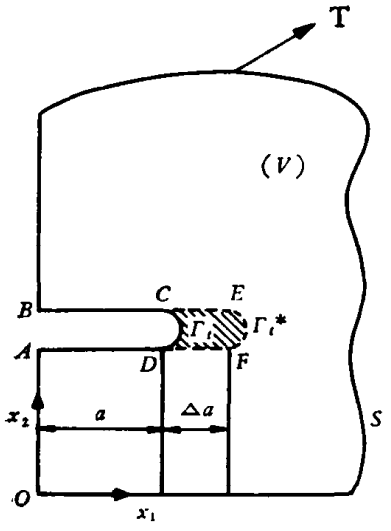


图 3

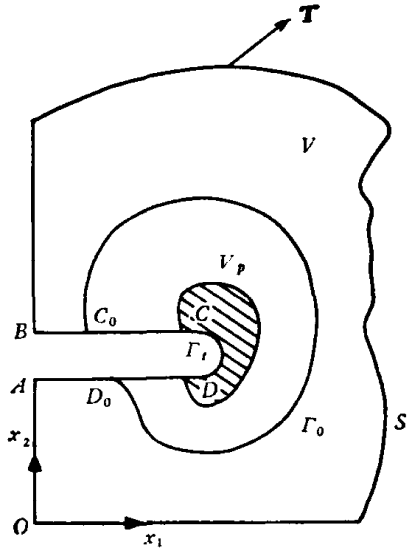


图 4

线 $CEFD$ 是开裂面，作用在它上面的张力卸载至零，造成该区域微元完全卸载，因此内力所作的功，等于卸载所释放的弹性应变能：

$$\Delta A'_o = -\iint_{\Delta V} W_e(\sigma_{ij})dV. \tag{14}$$

另一部分是区域 $V-\Delta V$ 中，内力所作的功

$$\Delta A''_o = \iint_{V-\Delta V} \sigma_{ij}(\varepsilon^*_{ij} - \varepsilon_{ij})dV, \tag{15}$$

$\varepsilon^*_{ij}$ 是切口端部扩展后的应变.

裂纹扩展力 $\tilde{G}$ 可以由下式确定[4]：

$$\tilde{G}\cdot\Delta a = \Delta A_T - (\Delta A'_o + \Delta A''_o) \tag{16}$$

$$\tilde{G} = \int_{S_T} T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial a} ds - \int_{V-\Delta V} \sigma_{ij}\cdot\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} dV + \lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\iint_{\Delta V} W_e dV. \tag{17}$$

在圆弧 $\overset{\frown}{DC}$ 上，$T_i = 0$；又在 $S_u$ 上位移预先给定，因此

$$\frac{\partial u_i}{\partial a} = 0, \qquad \text{在 } S_u \text{ 上.}$$

依照虚功原理：

$$\int_V \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} dV = \int_S T_i\frac{\partial u_i}{\partial a} ds = \int_{S_\tau} T_i\frac{\partial u_i}{\partial a} ds + \int_{\overset{\frown}{DC}} T_i\frac{\partial u_i}{\partial a} ds + \int_{S_u} T_i\frac{\partial u_i}{\partial a} ds$$
$$+ \int_{\overline{DA}+\overline{BC}} T_i\frac{\partial u_i}{\partial a} ds = \int_{S_\tau} T_i\frac{\partial u_i}{\partial a} ds. \tag{18}$$

将(18)式代入(17)式得：

$$\tilde{G} = \lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_{\Delta V} W_e(\sigma_{ij})dV = \int_{\Gamma_t} W_e dy. \tag{19}$$

考察任意一条包围切口端部的回路 $\Gamma_0$，$\Gamma_0$ 与 $\Gamma_t$ 及线段 $CC_0$，$D_0D$ 组成一个封闭回路 $C$，应用公式(7)得

$$L_C = \int_C \left\{W_e dy - \vec{T}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds\right\} = -\iint_{V_p}\sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon^p_{ij}}{\partial x} dV,$$

在半圆 $\Gamma_t$ 上 $\vec{T}$ 等于零；在切口自由表面 $CC_0$ 及 $D_0D$ 上 $\vec{T}$ 也等于零，$dy$ 等于零，由此

$$\int_{\Gamma_0}\left\{W_e dy - \vec{T}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds\right\} + \int_{V_p}\sigma_{ij}\cdot\frac{\partial \varepsilon^p_{ij}}{\partial x} dV = \int_{\Gamma_t} W_e dy. \tag{20}$$

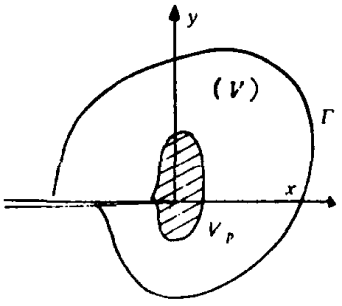

图 5

(20)式左边表示一个 $\tilde{I}$ 积分，由(19)、(20)得

$$\tilde{G} = \tilde{I}, \tag{21}$$

$\tilde{I}$ 积分与裂纹扩张力 $\tilde{G}$，字母上的符号“～”表示对细长深切口而言的，让切口宽度趋于零即得

$$G = I, \tag{22}$$

公式(22)表明 $I$ 积分等于裂纹扩张力.

## 四、$I$ 积分与 $J$ 积分

对于理想的弹性材料（线性的或非线性的）卸载时所释放的弹性应变能 $W_e$ 与加载时储存

的弹性应变能相等. 因此有 $W_e \equiv W$

另一方面有 $\varepsilon_{ij}^p \equiv 0$, 这样就得到

$$I = \int_\Gamma \left( W_e dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \right) + \int_{v_p} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x} dxdy = \int_\Gamma \left( W_e dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \right) = J. \quad (23)$$

也就是对理想弹性材料, $I$ 积分与 $J$ 积分相等, 众所周知, $J$ 积分的几个基本性质都是在形变理论范围内得到了证实, $J$ 积分本身包含有应变能密度 $W$, 这意味着 $J$ 积分只对线弹性材料及亨基 (Hencky) 材料有明确的意义, 塑性理论已经证明亨基材料本质上是非线性弹性材料. 因此, $J$ 积分实质上是理想弹性材料的 $I$ 积分.

对于真实材料, 裂纹顶端必然有塑性区, 如果塑性区 $V_p$ 限制在很小的区域内, 那么可以认为当线积分路径离裂纹顶端充分远时, $I$ 积分的线积分部分与 $J$ 积分相等. 因为在积分路径上, 应力应变处于弹性状态, 并且应力应变的数值不受塑性区 $V_p$ 的影响, 因此, 对小范围屈服的有

$$I = J + \iint_{V_p} \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x} dxdy. \quad (24)$$

这里特别强调 $J$ 积分的路径必须包围裂纹顶端的整个塑性区, 不许通过塑性区.

公式(24)表示了对真实塑性材料, $I$ 积分与 $J$ 积分之间的互相关系, 对这种关系, 我们可以提出一种新的物理解释, 这种新的解释如果被实验证明为正确的话, 那将给 $I$ 积分作为弹塑性断裂准则提供依据.

由于 $I$ 积分考虑了真实塑性材料的裂纹扩展过程, 因此从宏观的连续介质力学观点出发, $I$ 积分描述了宏观的裂纹扩张力, 当 $I$ 积分的线积分路径包围了整个塑性区时, $I$ 积分可表示为裂纹扩张的弹性驱动力与裂纹扩张塑性阻力之差, 令

$$G_e = \int_\Gamma W_e dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds, \quad (25)$$

$$R_p = - \iint_{(V_p)} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x} dxdy, \quad (26)$$

则

$$I = G_e - R_p. \quad (27)$$

不难证明对任何包含裂纹尖端整个塑性区 $V_p$ 的回路 $\Gamma$ (由裂纹自由面任一点开始, 逆时针包围裂纹尖端整个塑性区, 而终止于裂纹另一个自由面的任意回路), $G_e$ 是个不变量, 它等于回路 $\Gamma$ 上的 $J$ 积分, 它表征了裂纹扩展的弹性驱动力, $R_p$ 只是取决于裂纹尖端塑性区的应力及塑性应变特性, 它表征了裂纹扩展的塑性阻力, 另一方面, 从微观角度考虑, 裂纹扩展单位面积时, 在开裂面两侧必须提供表面张力 $2T$, 作为裂纹起始扩展的条件有

$$I_{1c} = 2T = (G_{1c} - R_{1p}). \quad (28)$$

从公式(28)看出, 当裂纹扩展的弹性驱动力 $G_{1c}$ 等于塑性阻力 $R_{1p}$ 与两倍表面张力 $2T$ 之和时, 裂纹起始扩展.

对脆性材料, 线弹性断裂准则给出

$$G_{1c} = G_{1c}, \quad (29)$$

从(28)式得出

$$(R_{1p})_{cT}^{\bullet} = G_{1c} - 2T. \quad (30)$$

对大多数金属而言，$G_{1c}$ 通常比表面张力大三个数量级，因此，从(30)式得

$$(R_{1p})_{cT} \doteq G_{1c}. \tag{31}$$

公式(31)对脆性材料的断裂准则给出了另一种物理解释，也就是说对脆性材料而言，裂纹扩展的塑性阻力 $R_{1p}$ 随着载荷的增加趋向于临界值，该临界值是个材料常数.

$I$ 积分适用于裂纹扩展过程，因此，它不仅能予示裂纹的起始扩展，而且能予示裂纹的亚临界扩展和失稳扩展的整个过程，对脆性材料而言，裂纹扩展的塑性阻力 $R_{1p}$，随着裂纹的亚临界扩展迅速趋于饱和，该饱和值与临界值差别很小，都可看作材料常数.

## 参 考 文 献


[1] Eshelby, J. D., in *Solid State Physics*, Academic Prese, 3(1956), 100.

[2] Rice, J. R., *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1968, 379—386.

[3] Rice, J. R., *Fracture* (Ed. H. Liebowitz), Academic Press, 2(1968), 191—311.

[4] Irwin, G. R., *J. Appl. Mech., ASME*, Series E, 1962, 651—654.


# 海带雌性孢子体的首次记录


方宗熙　戴继勋　崔竞进　欧毓麟

（山东海洋学院生物系）


根据海藻学的记载，海带孢子体是无性的，也就是雌雄同体的[1]，它所产生的孢子大约有一半萌发长成雌配子体，有一半萌发长成雄配子体. 性别在配子体中如此分化可能跟遗传有关. 欧洲海藻学者 Evans[2] 曾观察到欧洲产的几个物种的海带雌配子体有一个特别大的染色体，他猜想这可能是性染色体，但没有证明. 我们所研究的这种海带（*Laminaria japonica*），在其雌配子体细胞中没有看到一个特别大的染色体. 但是我们在海带单倍体遗传育种的实验中，却有新的发现. 我们发现海带雌配子体由孤雌生殖所产生的孢子体(图 1)，在海上培养成



图 1　海带雌配子体由孤雌生殖所长成的雌性孢子体
这是在海里生长的情况，变异较大，有一部分生长正常，它们大都能产生后代



图 2　海带雌性孢子体产生的孢子所萌发长成的雌配子体
（没有看到雄配子体）


本文 1977 年 8 月 2 日收到.