处理黑洞反作用的一条新途径*

赵 峥　　戴宪新

(北京师范大学物理系，北京 100875)

关键词　事件视界、黑洞反作用、Tortoise 变换、Hawking 辐射

本文介绍一种在考虑反作用的情况下确定黑洞温度的新方法. 在 Vaidya 情况得到与前人一致的结果.

在考虑反作用的情况下，蒸发黑洞的辐射温度通常用二维模型来进行计算[1]. 其理论基础是把不考虑反作用时进入稳态黑洞的入射负能流 $t_{\mu\nu}$ 与视界表面重力 κ 的关系[2]

$$|t_{\mu\nu}| = \frac{\kappa^2}{48\pi} \tag{1}$$

外推到存在反作用的非稳态情况，从而由 $t_{\mu\nu}$ 得到黑洞辐射的有效温度

$$T = (12|t_{\mu\nu}|\pi^{-1})^{1/2}. \tag{2}$$

在球对称、渐近平直的黑洞时空，上述公式能给出较令人满意的结果. 然而非球对称黑洞很难用二维模型来考虑，非渐近平直时空则难以确定入射能流[3]. 所以，这个方法一般不能用于非球对称或非渐近平直情况的蒸发黑洞. 最近，Kim[4] 等人把由 Damour 和 Ruffini[5] 创立、后被 Sannan[6] 改进的研究稳态黑洞辐射的方法尝试用于 Vaidya 黑洞，得到与前人相同的黑体辐射谱. 然而，使用这种方法，必须预先知道事件视界位置和辐射温度(即表面重力). 如前所述，在非球对称或非渐近平直的情况下，还没有找到确定蒸发黑洞温度的有效方法. 因此，上述研究黑洞反作用的方法有很大局限性.

注意到黑洞辐射是一个量子隧道效应，我们推测粒子在视界附近应该显示典型波动性. 所以用 Tortoise 坐标表述的粒子动力学方程在视界附近应该约化成通常的波动方程[7]. 从这一设想出发，我们找到一个普遍适用的、在考虑反作用情况下确定黑洞辐射温度的新方法. 不必像 Kim 那样预先知道温度，再把粒子动力学方程化成波动方程，而是在把动力学方程化成波动方程的过程中，自然地确定辐射温度. 为了简明地介绍这一方法，本文仅以 Vaidya 时空的 Klein-Gordon 方程为例进行论述. 我们得到与前人一致的结果，从而证实了这一方法的可行性. 然而，需要强调的是，这里的方法适用于一切考虑反作用的黑洞时空，也适用于一切自旋的粒子，具有普遍意义. 因而可用它处理非球对称、非渐近平直时空中黑洞反作用问题. 有关这方面的工作，我们将陆续发表.

对于一般的静态和稳态时空，当不考虑辐射的反作用时，在视界附近作 Tortoise 变换，Klein-Gordon 方程可以化成波动方程[7]. 我们认为，在考虑反作用的情况下，在视界附近作

本文 1991 年 1 月 11 日收到.

* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目.

如下 Tortoise 坐标变换:

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa}\ln(r - r_{EH}), \tag{3}$$

Klein-Gordon 方程也应化成标准的波动方程. 上式中, 事件视界位置 r_{EH} 可以是 v 或 r 的函数,而视界表面重力 κ 则是待定的常数. 下面,我们仅在辐射强度 $L\left(L\equiv-\frac{dm}{dv}\right)$的一级近似下,用自己建立的方法研究 Vaidya 时空中黑洞的热辐射,最后得到与 Balbinot 完全相同的结果.

在描述黑洞蒸发的 Vaidya 时空

$$dS^2 = -\left(1-\frac{2m(v)}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{4}$$

中,把 Klein-Gordon 方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}\right) - u^2\Phi = 0 \tag{5}$$

分离变量 $\Phi = R(r, v)S(\theta, \varphi)$, 化成横向方程和径向方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2} + \lambda S = 0, \tag{6}$$

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2 R}{\partial r\partial v} + \frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial v} + \left[\frac{2}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right) + \frac{2m}{r^2}\right]\frac{\partial R}{\partial r} - \left(u^2 + \frac{\lambda}{r^2}\right)R = 0. \tag{7}$$

考虑到球对称性,知 $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2\cdots$. 设 $R = r^{-1}\rho(r, v)$, 代入(7)式,径向方程化为

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2\sigma}{\partial v\partial r} + \frac{2m}{r^2}\frac{\partial\rho}{\partial r} - \left[\frac{2m}{r^3} + \left(u^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\right]\rho = 0. \tag{8}$$

下面讨论(8)式在视界附近的行为,由(3)式及 $v_* = v$ 得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \left(1 + \dfrac{1}{2\kappa}\dfrac{1}{r - r_{EH}}\right)\dfrac{\partial}{\partial r_*}, \\ \dfrac{\partial}{\partial v} = \dfrac{\partial}{\partial v_*} - \dfrac{1}{2\kappa}\dfrac{\dot r_{EH}}{r - r_{EH}}\dfrac{\partial}{\partial r_*}, \end{cases} \tag{9}$$

式中 $\dot r_{EH} \equiv \frac{dr_{EH}}{dv}$. 将(9)式代入(8)式得

$$\begin{aligned} &\left\{\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{1}{2\kappa}\frac{1}{r - r_{EH}}\right) - \frac{1}{\kappa}\frac{\dot r_{EH}}{r - r_{EH}}\right\}\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2} + 2\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*\partial v_*} + \left\{\frac{\dot r_{EH}}{\kappa(r - r_{EH})^2}\right. \\ &\left. - \frac{1}{2\kappa}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{1}{(r - r_{EH})^2} + \frac{2m}{r^2}\left(1 + \frac{1}{2\kappa}\frac{1}{r - r_{EH}}\right)\right\}\left(1 + \frac{1}{2\kappa}\frac{1}{r - r_{EH}}\right)^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial r_*} \\ &- \left[\frac{2m}{r^3} + \left(u^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\right]\left(1 + \frac{1}{2\kappa}\frac{1}{r - r_{EH}}\right)^{-1}\rho = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

显然,在 $r \to \infty$ 时,(8)式和(10)式都能化成波动方程的标准形式

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2} + 2\frac{\partial^2\rho}{\partial v_*\partial r_*} - u^2\rho = 0.$$

下面考察(10)式在视界附近的渐近行为，我们认为，当 $r \to r_{BH}$ 时，(10)式也应化成波动方程，这就要求 $\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2}$ 的系数为 1. 即在 $r \to r_{BH}$ 时，有

$$\frac{(r-2m)[2\kappa(r-r_{BH})+1]-2rr_{BH}}{2\kappa(r-r_{BH})r} \to 1. \tag{11}$$

对于描述蒸发黑洞的 Vaidya 度规，事件视界的位置[8]

$$r_{BH} = 2m(1+4\dot{m}). \tag{12}$$

将(12)式代入(11)式得

$$\kappa = \frac{1}{4m}(1-4\dot{m}). \tag{13}$$

按照 Balbinot 的处理方法，这里把 $\dot{m}^2$ 与 $\dot{m}$ 作为二级小量忽略[1]. 下面将看出，(13)式的 κ 将决定黑洞的辐射温度. 把(13)式代入(10)式，不难看出，在 L 的一级近似下，径向方程在事件视界附近化成了波动方程

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2} + 2\frac{\partial^2\rho}{\partial r_* \partial v_*} = 0, \tag{14}$$

其线性独立解为

$$\rho^{\omega}_{入射} = \exp(-i\omega v);\ \rho^{\omega}_{出射} = \exp(-i\omega v + 2i\omega r_*). \tag{15}$$

容易看出，出射波解在视界上有对数奇异性，我们采用 Damour 和 Ruffini 的方法[5]，将 $\rho^{\omega}_{出射}$ 解析延拓到黑洞内部，得到

$$\begin{aligned} \bar{P}_\omega &= e^{-i\omega v}e^{2i\omega r_*}, && r > 2m, \\ &= e^{\frac{\pi\omega}{\kappa}} \cdot e^{-i\omega v} \cdot e^{2i\omega r_*}, && r < 2m. \end{aligned} \tag{16}$$

这里，$\bar{P}_\omega$ 代表视界外的出射粒子波和视界内的入射负能反粒子波，或者解释为黑洞内逆时前进的正能出射粒子在视界处被散射，然后顺时运动飞向远方. 散射幅由相对因子 $e^{\frac{\pi\omega}{\kappa}}$ 决定[6]. 由此可知相对散射几率为

$$P_\omega = e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa}}. \tag{17}$$

按照 Sannan 对 P_ω 的解释[6]，可知 Hawking 辐射温度为

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi m}(1-4\dot{m}). \tag{18}$$

这一结论跟 Balbinot 采用求重整化能-动张量期望值的方法得出的结论完全相符. 在考虑反作用的情况下，Vaidya 黑洞象温度为(18)式的黑体一样，向外热辐射粒子.

从上述讨论可知，我们提出的新方法是合理的、可用的. 这种方法提供了在考虑反作用的情况下确定黑洞温度的新途径. 它可广泛应用于各种蒸发黑洞，具有普遍意义.

参 考 文 献

[1] Balbinot, R., *Phys. Rev.*, **D33**(1986), 1611.
[2] Birrell, N. D. & Davis, P. C. W., *Quantum Field in Curved Space*, Cambridge University Press, 1982, 269.
[3] Matyjasek, J., *Phys. Lett.*, **A120**(1987), 179.
[4] Kim, S. W. et al., *ibid.*, **A141**(1989), 238.
[5] Damour, T. & Ruffini, R., *Phys. Rev.*, **D14**(1976), 332.
[6] Sannan, S., *Gen. Rel. Grav.*, 20(1988), 239.
[7] 刘辽、赵峥，科学通报，26(1981)，20：1253；赵峥、桂元星，天体物理学报，3(1983)，146.
[8] York, Jr. J. W., in *Quantum Theory of Gravity*, 1984, 135.