科学通报 2015 年 第 60 卷 第 34 期: 3294 ~ 3305
专题: 纪念广义相对论诞生100周年 进 展 www.scichina.com csb.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

宇宙残余引力波和双星引力辐射

张杨

中国科学技术大学天文学系, 中国科学院星系与宇宙学重点联合实验室, 合肥 230026
E-mail: yzh@ustc.edu.cn

2015-09-11 收稿, 2015-09-28 接受, 2015-11-05 网络版发表
国家自然科学基金(11275187, 11421303)、教育部博士点基金(20133402110056)和中国科学院先导专项 B(XDB09000000)资助

摘要 综述广义相对论中引力波的研究, 主要报告有关残余引力波和引力辐射方面的系列研究结果. 先简介引力波方程和基本物理概念, 然后讨论含有扰动二阶项的非线性场方程, 引力波的能动张量, 短波平均, 残余引力波的压强定义和高频发散扣除等问题. 给出膨胀宇宙中残余引力波的解析解, 覆盖了从极早期暴涨到现阶段加速膨胀的各阶段, 给出任何时刻和波长都成立的功率谱、能量密度和压强谱, 讨详细论了暴涨阶段原初谱的定义, 简介现阶段谱的各频段可能探测, 主要讨论目前运行的激光干涉探测器对谱的限制和信噪比, 给出残余引力波所诱导的微波背景辐射的磁场型偏振的解析谱. 最后基于后牛顿近似, 计算OJ287双黑洞的轨道、引力辐射能流、波形等, 讨论了双星的质心漂移问题.

关键词
广义相对论
引力波的能动张量
残余引力波
微波背景辐射
引力辐射
OJ287 双黑洞

爱因斯坦的广义相对论已建立100年[1], 其等效原理已经为Eotvos实验、引力红移等所验证, 基于Schwarzschild解的光线偏折、Shapiro时间延迟、水星近日点进动等得到观测验证[2,3]. 均匀各向同性Robertson-Walker(RW)度规, 及爱因斯坦场扰动方程, 已成为大爆炸宇宙学的理论基础[4], 解释了一系列天文、宇宙学观测[5]. 但这些只是验证了爱因斯坦方程的标量部分, 而张量部分, 即满足双曲型波动方程的引力波, 仍未得到直接验证. 双星PSR1913+16观测表明轨道周期变小, 可能是双星辐射出引力波所导致[6], 与2.5阶后牛顿计算符合达到0.3%的精度. 但这只是间接验证引力波的存在. 还需直接验证. 另一方面, 按照量子论, 传递引力相互作用的引力场应是量子场. 这就涉及到引力场的量子性质, 而只有确定引力具有波动性质, 研究其量子性质才有坚实的基础.

根据理论, 引力波产生于诸多天体物理和宇宙学过程中. 例如双致密星绕转、黑洞的吸积、超新星爆发、中子星振动等, 都会辐射出引力波, 带走能量、角动量, 也影响天体的演化. 在宇宙极早期暴涨过程, 时空度规的原初扰动包括标量型和张量型的. 标量型扰动构成宇宙大尺度结构的种子, 而张量型扰动残留下来成为残余引力波(RGW)[7~13]. 由于引力作用微弱, 宇宙对于RGW几乎始终是透明的, RGW携带了早期宇宙的、比微波背景辐射(CMB)更早的信息, 为探索宇宙提供了一新的窗口. 主要讨论残余引力波和双星的引力辐射.

1 引力波方程

爱因斯坦方程

$$G_\nu^\mu = \frac{8\pi G}{c^4} T_\nu^\mu \tag{1}$$

是出发点, 其中 $G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R$ 是爱因斯坦张量, T_ν^μ 是除了引力场之外的各种物质场的能动张量. 为研究引力波, 把方程(1)线性化, 把度规分解为

引用格式: 张杨. 宇宙残余引力波和双星引力辐射. 科学通报, 2015, 60: 3294–3305
Zhang Y. Relic gravitational wave in universe and gravitational radiation of binary (in Chinese). Chin Sci Bull, 2015, 60: 3294–3305, doi: 10.1360/N972015-01041

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu},\ |h_{\mu\nu}|\ll 1, \tag{2}$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 为背景度规，如平直时空的diag(−1,1,1,1)，$h_{\mu\nu}$ 是度规扰动，包括不可约化的3部分：标量扰动、矢量扰动、张量扰动，后者即引力波．标量和矢量部分的场方程不是波动方程．这里只关心引力波部分，保留到扰动 $h_{\mu\nu}$ 的一阶，方程(1)化为

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu}=-\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{3}$$

其中 $\bar{h}_{\mu\nu}\equiv h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$，$h\equiv\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$，$\Box=\partial_\gamma\sqrt{-g}\eta^{\gamma\sigma}\partial_\sigma$ $=-\frac{1}{c^2}\partial_0^2+\nabla^2$．方程(3)是关于 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 的波动方程，引力波传播速度为光速c．对局域的天体情况，向外辐射引力波解为如下形式：

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{x})=\frac{4\pi G}{c^4}\int\frac{T_{\mu\nu}(t-\frac{1}{c}r,\boldsymbol{x}')}{r}\mathrm{d}^3x', \tag{4}$$

其中 $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$．给定物质源的$T_{\mu\nu}$，就可解出引力波 $\bar{h}_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{x})$．对质量四极矩分布的系统，公式(4)积分出来，

$$h_{ij}^{TT}(t,\boldsymbol{x})=\frac{2G}{rc^4}\ddot{Q}_{ij}^{TT}\left(t-\frac{r}{c}\right), \tag{5}$$

这里 $Q_{ij}^{TT}=\Lambda_{ij,kl}Q_{kl}$，

$$Q^{ij}(t)\equiv\int\mathrm{d}^3x\rho(t,\boldsymbol{x})\left(x^ix^j-\frac{1}{3}r^2\delta^{ij}\right)$$

是质量四极矩，偏振投影算子

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{k})\equiv P_{ik}P_{jl}-\frac{1}{2}P_{ij}P_{kl},$$

$$P_{ij}(\hat{k})\equiv\delta_{ij}-\hat{k}_i\hat{k}_j.$$

质量四极矩引力辐射是天体引力辐射的主要部分．公式(4)还可以计算出质量八极矩及流四极矩[14]．对真空情况，$T_{\mu\nu}$=0，则方程(3)化为齐次的波动方程．对RW时空，

$$\mathrm{d}s^2=a^2(\tau)\left[-\mathrm{d}\tau^2+(\delta_{ij}+h_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right], \tag{6}$$

其中 τ 为共形时间，$\Box=a^2\left(-\frac{1}{c^2}\partial_\tau^2-2\frac{1}{c^2}\frac{a'}{a}\partial_\tau+\nabla^2\right)$，方程变为[7,15]

$$h_{ij}''+2\mathcal{H}h_{ij}'-\partial^m\partial_m h_{ij}=0, \tag{7}$$

对于宇宙演化各个阶段都成立[11,12]．

引力波具有2个真正的动力学自由度，可以取如下约束方程：

$$h_i^i=0,\ \partial^j h_{ij}=0. \tag{8}$$

即无迹横波(*TT*)规范．这时有h=0，$\bar{h}_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}$．后一个式子就是横波条件，波振动幅垂直于波矢．于是h_{ij}就剩下两个独立分量，作为动力学自由度，记为 h_{ij}^{TT}．例如，平直时空背景下的真空中场方程的一个解，是沿z方向传播的平面波

$$h_{ij}^{TT}=\left(e_{ij}^{(1)}h^{+}+e_{ij}^{(2)}h^{\times}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kz},\ i,j=1,2, \tag{9}$$

这里两个偏振张量 $e_{ij}^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$e_{ij}^{(2)}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$h^{+}$和$h^{\times}$是两个独立的幅度．让坐标绕$z$轴转动$\theta$角，对应的转动矩阵 $R_i{}^j=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$，$h_{ij}^{TT}$ 的变换就体现在偏振的变换：$e_{ij}^{(p)'}=R_i{}^kR_j{}^le_{kl}^{(p)}$．令 $e_{ij}^{\pm}=e_{ij}^{(1)}\mp\mathrm{i}e_{ij}^{(2)}$，其变换为 $e_{ij}^{\pm'}=e^{\pm2\theta i}e_{ij}^{\pm}$，即 $e_{ij}^{\pm}$ 的螺旋量为±2，故称引力波的自旋为2[4,2]．

当引力波(9)通过时，沿x方向相距L的两点固有距离变为 $L_x=\int_0^L\sqrt{g_{xx}}\mathrm{d}x\simeq L\left(1+\frac{1}{2}h^{+}\right)$，沿$y$方向相距$L$的两点固有距离变为 $L_y=\int_0^L\sqrt{g_{yy}}\mathrm{d}y\simeq L\left(1-\frac{1}{2}h^{+}\right)$．设一束光在0点分光后，分别沿$x$, y方向传播，分别在L_x, L_y反射回来．根据光子的 $\mathrm{d}s^2=-c^2\mathrm{d}t^2+g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ =0，这两束光的时间差为 $\delta t=2(L_x-L_y)/c\simeq2Lh^{+}/c$，对应的相位差 $\delta\phi\simeq2\pi f\delta t$，其中$f$ 是光的频率．这是激光干涉探测引力波的基本思路．

一般情况下引力波作为量子场可由Fourier模展开[10,15]

$$h_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{s=+,\times}{}^{s}e_{ij}(k)\left[a_{\boldsymbol{k}}^sh_k^s(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot x}+a_{\boldsymbol{k}}^{s\dagger}h_k^{s*}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot x}\right],$$

$$\boldsymbol{k}=k\hat{k}, \tag{10}$$

其中引力子的产生和湮灭算子 $a_{\boldsymbol{k}}^s$，$a_{\boldsymbol{k}}^{s\dagger}$ 满足 $\left[a_{\boldsymbol{k}}^s,a_{\boldsymbol{k}'}^{r\dagger}\right]=\delta_{sr}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$，两个独立偏振张量 ${}^{s}e_{ij}(k)\delta_{ij}=0$，${}^{s}e_{ij}(k)k^i=0$，${}^{s}e_{ij}(k)\epsilon_{ij}^{s'}(k)=\delta_{ss'}$，设单位矢量$\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$相互垂直，且与波矢$\boldsymbol{k}$垂直，可构造两个独立线偏振张量 ${}^{1}e_{ij}=l_il_j-m_im_j$，${}^{2}e_{ij}=l_im_j+m_il_j$，此构造不是唯一的，可取其他形式[10,11]．

2 引力波能动张量

线性化的场方程(3)只能应用于物质源分布和运动独立于引力场的简单线性情形. 实际上, 引力场影响物质源的分布和运动, 而物质源又产生引力场. 回到完整的爱因斯坦方程, 保留非线性,

$$\Box h^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}(-g)T^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu}, \tag{11}$$

其中 $h^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}$, 满足协和条件 $\partial_\nu h^{\mu\nu} = 0$, 波动方程(11)的源由物质和引力场共同组成, 其中[16]

$$\Lambda^{\mu\nu} \equiv \frac{16\pi G}{c^4}(-g)t_{LL}^{\mu\nu} + \partial_\rho h^{\mu\sigma}\partial_\sigma h^{\nu\rho} - h^{\rho\sigma}\partial_{\rho\sigma}^2 h^{\mu\nu}, \tag{12}$$

是引力场自身作为源, 这里 $t_{LL}^{\mu\nu}$ 是引力场的能动赝张量[17], 在平直背景时空, 其表达式简化为[18]

$$\begin{aligned}\frac{16\pi G}{c^4}(-g)t_{LL}^{\alpha\beta} =& \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}h^{\lambda\nu}{}_{,\rho}h^{\rho\mu}{}_{,\nu} \\ &-\left(g^{\alpha\lambda}g_{\mu\nu}h^{\beta\nu}{}_{,\rho}h^{\rho\mu}{}_{,\lambda} + g^{\beta\lambda}g_{\mu\nu}h^{\alpha\nu}{}_{,\rho}h^{\rho\mu}{}_{,\lambda}\right) \\ &+ g^{\nu\rho}g_{\lambda\mu}h^{\alpha\lambda}{}_{,\nu}h^{\beta\mu}{}_{,\rho} + \frac{1}{8}\left(2g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu}\right) \\ &(2g_{\nu\rho}g_{\sigma\tau} - g_{\rho\sigma}g_{\nu\tau})h^{\nu\tau}{}_{,\lambda}h^{\rho\sigma}{}_{,\mu}.\end{aligned} \tag{13}$$

由协和条件得到物质和引力场的总能量动量守恒式

$$[(-g)(T^{\mu\nu} + t_{LL}^{\mu\nu})]_{,\nu} = 0. \tag{14}$$

此式与 $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ 是一致的. 方程(11)~(14)联立, 组成引力辐射问题的基本方程组, 是非线性的, 较复杂. 可以采用后牛顿(PN)近似方法逐阶计算. 20世纪80年代以来有较大进展, 对双星系统, 目前已处理到轨道的3.5PN阶、能流和角动量流的2PN阶[19,20]、波形的2PN阶[21], 以及自旋的效应[22].

二阶扰动方程(11)在物质为主的RW时空中, 可以分解为标量, 张量的不可约化部分. 把一阶扰动的解, 带入右边的源中, 原则上可以得到标量扰动、张量扰动各自的场方程. 这也是CMB各向异性的非高斯性的根源. 在一阶解忽略某些初始值项的情况下, 已经得到标量-标量的扰动乘积作为源的场方程[23]. 我们近期推广到含有全部初始条件的情况, 还给出标量-引力波以及引力波-引力波的乘积形式作为源的场方程.

等效原理意味着引力场的能量动量不是张量, 而是赝张量, 表达式不是唯一的. 基于不同考虑, 有过不同的定义[24,25]. Landau-Lifshitz[17]给出的引力场能量动量赝张量适用于一般弯曲时空, 而公式(13)乃是在背景时空为平直情况下的表达式. 一般的背景是给定的弯曲时空, 如RW时空, 再加上引力场小扰动, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. 所谓的有效能动张量 $t_{\rm eff}^{\mu\nu}$ [26,27]是着眼于小扰动 $h_{\mu\nu}$ 的能量动量对于背景时空有影响. 把方程(1)展开到 $h^{\mu\nu}$ 的二阶:

$$G^{(0)\mu\nu} + G^{(1)\mu\nu} + G^{(2)\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}[T^{(0)\mu\nu} + T^{(1)\mu\nu} + T^{(2)\mu\nu}]. \tag{15}$$

再要求一阶部分满足方程 $G^{(1)\mu\nu} = 8\pi G T^{(1)\mu\nu}/c^4$, 方程(15)化为

$$G^{(0)\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left[T^{(0)\mu\nu} + T^{(2)\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4}G^{(2)\mu\nu}\right], \tag{16}$$

方程(16)显示 $G^{(2)\mu\nu}$ 也是源的一部分, 即相当于有效能动张量[26,27],

$$\begin{aligned}-\frac{8\pi G}{c^4}t_{\rm eff}^{\mu\nu} \equiv& G^{(2)\mu\nu} \\ =& R^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{(0)\mu\nu}g_{\rho\sigma}^{(0)}R^{(2)\rho\sigma} \\ &+\frac{1}{2}\left[g_{\rho\sigma}^{(0)}h^{\mu\nu} - g^{(0)\mu\nu}h_{\rho\sigma}\right]R^{(1)\rho\sigma} \\ &+\frac{1}{2}\left[R^{(0)\rho\sigma}h_{\rho\sigma}h^{\mu\nu} - R^{(0)}h^{\mu\sigma}h_\sigma^\nu\right],\end{aligned} \tag{17}$$

对于平直的背景时空, 它简化为[4]

$$\begin{aligned}-\frac{8\pi G}{c^4}t_{\rm eff}^{\mu\nu} =& R^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}R^{(2)\rho\sigma} \\ &+\frac{1}{2}\left[\eta_{\rho\sigma}h^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}h_{\rho\sigma}\right]R^{(1)\rho\sigma}.\end{aligned} \tag{18}$$

(13)式和(17)式给出的引力波能量动量表达式不仅复杂, 且不具有规范不变性. 一般的引力波含有各个频段, 波长接近背景时空变化尺度的长波部分可视为背景, 短波部分能够在实验室中观测. 在短波极限下, 采用Brill-Hartle-Isaacson方法[26,28], 对Landau-Lifshitz公式(13)做平均, 得到[18]

$$\langle t_{LL}^{\mu\nu}\rangle = t_{BH}^{\mu\nu} \equiv \frac{c^4}{32\pi G}\langle h^{\rho\sigma,\mu}h_{\rho\sigma}{}^{,\nu}\rangle, \tag{19}$$

其中 $\langle\cdots\rangle$ 表示平均. 上式右边是规范不变的观测量, 是常用的. 同样处理(17)的有效能量动量, 也能够给出 $\langle t_{\rm eff}^{\mu\nu}\rangle = t_{BH}^{\mu\nu}$. 文献[29]采用(17)来讨论极早期宇宙的反弹模型, 以及长波效应. 但是, 在长波极限下(17)定义的 $t_{\rm eff}^{\mu\nu}$ 不能够做Brill-Hartle-Isaacson平均, 其规范不变性还在探讨中[30].

近期我们研究了RGW在高频段的发散问题，把RGW作为量子场，分解为真空部分和产生的引力子部分，计算表明频率f>10^{11} Hz的部分是真空的贡献，其余是引力子的贡献. 藉此，发散的来源得到了清晰的认证. 弯曲时空中量子场的真空高频发散，通常采用绝热规则化(adiabatic regularization)方法，来扣除掉真空发散. 利用RGW的解析解，对真空和引力子贡献的能动张量的高频发散做了规则化计算，得到收敛的结果.

在RW时空，由(17)式给出引力波的有效能量密度和压强[18]:

$$\rho_{gw}=t^0_0=\frac{1}{8\pi Ga^2}\left[\mathcal{H}h'_{kl}h^{kl}+\frac{1}{8}(\partial_m h_{kl}\partial^m h^{kl}+h'_{kl}h'^{kl})\right], \quad (20)$$

$$p_{gw}=-\frac{1}{3}t^i_i=\frac{1}{24\pi Ga^2}\left[\frac{7}{8}\partial_m h_{kl}\partial^m h^{kl}-\frac{5}{8}h'_{kl}h'^{kl}\right], \quad (21)$$

其中 $\mathcal{H}\equiv a'(\tau)/a(\tau)$. 若要求协变守恒，

$$t^{\mu}_{\nu|\mu}=0, \quad (22)$$

这里协变导数用背景度规，给出常用的引力波能量守恒方程的形式

$$\frac{\partial\rho_{gw}}{\partial\tau}+3\mathcal{H}(\rho_{gw}+p_{gw})=0, \quad (23)$$

这等价于(19)式协变守恒 $t^{\mu\nu}_{BH\ |\nu}=0$. 通常物理体系的能量守恒方程与场方程等价. 例如，计算平直时空中(13)式的 $t^{\mu\nu}_{LL}$ 的协变导数，得到 $16\pi G t^{0\mu}_{LL\ ,\mu}=\frac{1}{2}\bar{h}^{ij,0}\Box\bar{h}_{ij}$，所以 $t^{0\mu}_{LL\ ,\mu}=0\Leftrightarrow\Box\bar{h}_{ij}=0$. 那么RW时空中守恒方程(23)能否给出场方程(7)? 直接计算得

$$\frac{\partial\rho_{gw}}{\partial\tau}+3\mathcal{H}(\rho_{gw}+\mathcal{P}_{gw})$$
$$=\frac{1}{8\pi Ga^2}\left(\frac{1}{4}h'^{kl}+\mathcal{H}h^{kl}\right)(h''_{kl}+2\mathcal{H}h'_{kl}-\partial^m\partial_m h_{kl}). \quad (24)$$

其中新的压强

$$\mathcal{P}_{gw}\equiv p_{gw}+\frac{\mathcal{H}^2-\mathcal{H}'}{24\pi G\mathcal{H}a^2}h'_{kl}h^{kl}. \quad (25)$$

场方程(7)满足时，(24)式右边为0，即是用压强 $\mathcal{P}_{gw}$ 写出的能量守恒. (25)式的 $\mathcal{P}_{gw}$ 与 p_{gw} 相差一项. 文献[29]从另外途径引入了 $\mathcal{P}_{gw}$. 我们来揭示这一项的物理起因和意义. 由Bianchi恒等式 $G^{(0)\mu}_{\nu|\mu}=0$ 和方程(16)有

$$[T^{(0)\mu}{}_{\nu}+t^{\mu}_{\nu}]_{|\mu}=0, \quad (26)$$

这表明，当物质存在 $T^{(0)\mu}_{\nu}\neq0$ 时，物质和引力波共同的能动张量是协变守恒，而不是引力波自身的 t^{μ}_{ν} 守恒. 方程(26)给出 $t^{\mu}_{0|\mu}=-T^{(0)\mu}_{0|\mu}$，物质项 $T^{(0)\mu}_{0|\mu}$ 经过计算给出[18]

$$T^{(0)\mu}_{0|\mu}=\frac{\mathcal{H}^2-\mathcal{H}'}{8\pi Ga^2}h'_{kl}h^{kl}. \quad (27)$$

这可解释为引力波和物质之间的相互作用. 于是，$\mathcal{P}_{gw}$ 与 p_{gw} 相差为 $\mathcal{P}_{gw}=p_{gw}+\frac{1}{3\mathcal{H}}T^{(0)\mu}_{0|\mu}$. 对于波长远小于宇宙视界的引力波，$\frac{\mathcal{H}^2-\mathcal{H}'}{\mathcal{H}}|h^{kl}|\ll|h'^{kl}|$，此项远远小于压强 p_{gw}，且随膨胀而减小，可以忽略. 因此，对于宇宙视界之内的引力波，$\mathcal{P}_{gw}=p_{gw}$，场方程(7)与能量守恒方程(23)是等价的.

3 残余引力波

RGW产生于宇宙极早期的时空度规扰动h_{ij}，其波动方程(7)对给定的共动波数k和偏振态p化为

$$h^{(p)''}_k(\tau)+2\frac{a'}{a}h^{(p)'}_k(\tau)+k^2h^{(p)}_k=0. \quad (28)$$

两个偏振态的波动方程相同. 通常假设RGW的两个偏振态的统计性质相同，幅度相等，可省略p不写. 设 $h_k(\tau)=\frac{\mu_k(\tau)}{a(\tau)}$，则 μ_k 的方程为 $\mu''_k+\left(k^2-\frac{a''}{a}\right)\mu_k=0$. 对于一个具有幂律形式的背景时空 $a(\tau)\propto\tau^d$，通解为Hankel函数的叠加:

$$\mu_k(\tau)=a_k\sqrt{k\tau}H^{(1)}_{\left(d-\frac{1}{2}\right)}(k\tau)+b_k\sqrt{k\tau}H^{(2)}_{\left(d-\frac{1}{2}\right)}(k\tau). \quad (29)$$

宇宙膨胀历史由下列5个阶段描述[11,12]: 暴涨阶段: $a(\tau)=l_0|\tau|^{1+\beta}, -\infty<\tau\leqslant\tau_1$，其中$\tau_1$是暴涨结束时刻，$\beta\simeq-2$，$\beta=-2$ 是de Sitter膨胀. 再加热阶段: $a(\tau)=a_z(\tau-\tau_p)^{1+\beta_s}$，$\tau_1\leqslant\tau\leqslant\tau_s$，其中$\beta_s$是再加热参数，取 β_s=–0.3. 辐射为主阶段: $a(\tau)=a_e(\tau-\tau_e)$，$\tau_s\leqslant\tau\leqslant\tau_2$. 物质为主阶段: $a(\tau)=a_m(\tau-\tau_m)^2, \tau_2\leqslant\tau\leqslant\tau_E$，其中 τ_E 是暗能量密度 ρ_Λ 等于物质密度 ρ_m 的时刻，对应的红移z_E由 $(1+z_E)=a(\tau_H)/a(\tau_E)$ 给出，其中 τ_H 是现在时刻. 若取 Ω_Λ~0.7 和 Ω_m~0.3，则有 $1+z_E=\left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}\right)^{1/3}$ ~1.44. 加速膨胀阶段: $a(\tau)=l_H|\tau-\tau_a|^{-1}, \tau_E\leqslant\tau\leqslant\tau_H$. 这是现阶段的暗能量为主时期. 给定这一系列5个膨胀阶段，连接 $a(\tau)$，$a'(\tau)$，

及 $\mu_k(\tau)$，$\mu_k'(\tau)$，得到方程(28)的解析解 $h_k(\tau)$ [12].

在暴涨阶段取

$$\mu_k(\tau)=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{k\tau}{2k}}a_2H^{(2)}_{\beta+\frac{1}{2}}(k\tau), \tag{30}$$

其中 $A\equiv\sqrt{32\pi G}$ 是量子归一化所确定. 在高频极限下，$\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k(\tau)\to \mathrm{e}^{-ik\tau}$ 趋于正频模. 同时取暴涨时期的RGW处于真空态[10,11] $a_{\boldsymbol{k}}^s|0\rangle=0$，对 $s=+,\times$ $\boldsymbol{k}$. 由此给出完整的初始条件. 自关联函数的定义为

$$\int_0^\infty\Delta_t^2(k,\tau)\frac{\mathrm{d}k}{k}\equiv\langle 0|h^{ij}(x,\tau)h_{ij}(x,\boldsymbol{\tau})|\boldsymbol{0}\rangle, \tag{31}$$

得到任意时刻的RGW功率谱

$$\Delta_t^2(k,\tau)=\frac{k^3}{\pi^2}|h_k(\tau)|^2, \tag{32}$$

及相应的谱指数n_t, α_t. 原初谱定义在暴涨时期，且波长远大于视界[10,12]

$$\Delta_t^2(k)\equiv\Delta_t^2(k,\tau)|_{k\ll1/|\tau|}\simeq\frac{8}{M_{Pl}^2}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2k^{2\beta+4}, \tag{33}$$

其中 $M_{Pl}=1/\sqrt{8\pi G}$ 为Planck质量，H是暴涨速率. 对 $\beta\simeq-2$，(33)是一个近标度不变谱. 取(32)在现在时刻 τ_H，记 $h(k,\tau_H)\equiv\sqrt{\Delta_t^2(k,\tau_H)}=\frac{1}{\pi}k^{3/2}|h_k(\tau_H)|$ 就是观测中常用的特征幅度[14]. 图1画出了3个不同时刻的功率谱，展示了其随宇宙膨胀的演化. RGW的能量密度为

$$\rho_{gw}=\frac{1}{32\pi Ga^2}\langle 0|h_{ij}'h'^{ij}|0\rangle=\int_0^\infty\rho_k(\tau)\frac{\mathrm{d}k}{k}, \tag{34}$$

得到RGW能谱 $\rho_k(\tau)=\frac{1}{32\pi Ga^2}k^2\Delta_t^2(k,\tau)$，类似地得到压强谱 $p_k(\tau)=\rho_k(\tau)/3$. 图2画出了现在的RGW能量密度谱 $\Omega_g(f)=\rho_k(\tau_H)/\rho_c$. 观测中通常把RGW功率谱取为下列形式[31,32]

$$h(k,\tau_i)=\Delta_R(k_0)r^{1/2}\left(\frac{k}{k_0}\right)^{\frac{1}{2}n_t+\frac{1}{4}\alpha_t\ln(k/k_0)}. \tag{35}$$

这里k_0=0.002 Mpc^{-1}, $\Delta R(k_0)$是密度扰动幅度，WMAP观测给出 $\Delta_R^2(k_0)=(0.2445\pm0.096)\times10^{-9}$，$r=\Delta_h^2(k_0)/\Delta_R^2(k_0)$是张量/标量比，表示引力波所占份额，目前CMB观测给出的上限为r<0.2左右[33,34]. n_t是谱指数，α_t是跑动指数，刻画对幂律谱的偏离. 对比(33)式，

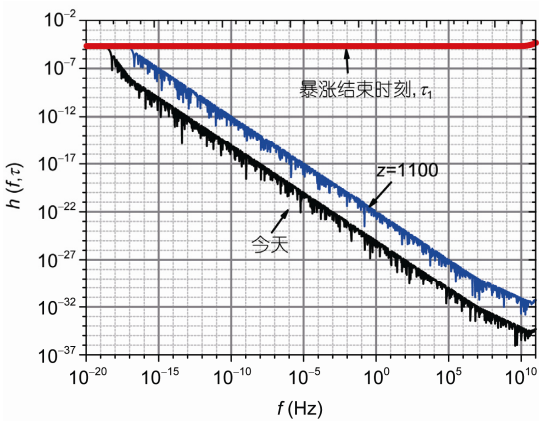


图 1 (网络版彩色)残余引力波功率谱 $h(v,\tau)$在不同时刻的形状

Figure 1 (Color online) Spectrum $h(f,\tau)$ at the end of inflation, at redshift z=1100, at present τ_H

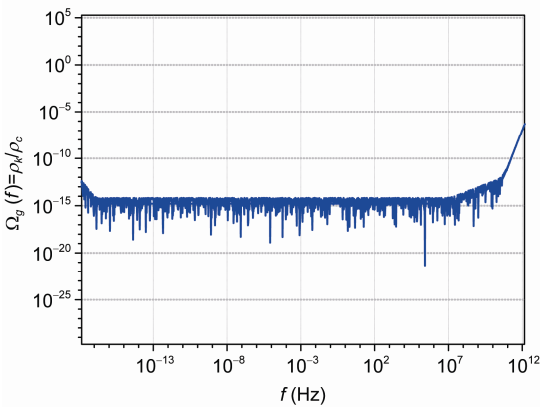


图 2 (网络版彩色)能量密度谱$\Omega_g(f)=\rho_k(\tau_H)/\rho_c$在现在时刻$\tau_H$

Figure 2 (Color online) Spectral energy density $\Omega_g(f)=\rho_k(\tau_H)/\rho_c$ at present τ_H, where ρ_c is the critical density

得到幂律暴涨中RGW的解析结果，

$$n_t=2\beta+4,\ \alpha_t=0. \tag{36}$$

于是RGW的原初谱的性质完全确定.

宇宙早期一些物理过程也影响RGW的谱，我们对此做了具体计算. 辐射为主时期在温度 $T\simeq2$ Mev时，中微子退耦合而做自由扩散，产生能动张量的各向异性部分作为波动方程的源，直到辐射为主时期结束. 这导致谱 $h(k,\tau_H)$ 在(10^{-16}~10^{-10} Hz)之间的幅度下降20%[35,36]. 此外，根据量子色动力学，在 $T\simeq190$ MeV时，发生夸克$\to$强子相变过程，使得相对论性粒子数目降低，标度因子时间导数 $a'(\tau)$有个跳跃，导致谱在>10^{-9} Hz频段的幅度下降20%. 类似地，在T=(0.5~0.1) MeV之间，发生正负电子对湮灭 $e^+e^-\to2\gamma$，导致谱在>10^{-12} Hz频段的幅度下降

10%[37]. 这些过程对谱 $h(k,\tau_H)$ 有小的修正，不改变其整体轮廓.

初始谱(35)式的3个参数(r,β,α_t)越大，谱幅度越高. 在频率$f>10^{-3}$ Hz 的中高频段，β和α_T的微小变动可以使RGWs幅度变化几个量级. 图3画出了暗能量α_t=0、张量/标量比r=0.2模型中指标n_t取不同值的RGWs解析谱 $h(f,\tau_H)$. 图4画出了r=0.2, β=–2.0, 跑动指标α_t取不同值的 $h(f,\tau_H)$.

RGW作为弥散在宇宙中随机涨落的背景，其频段极为宽，可作为目前各类引力波探测器的科学目标[38]. 目前RGW的一系列实际探测项目已在进行，就探测频率来说大致有4个频段.

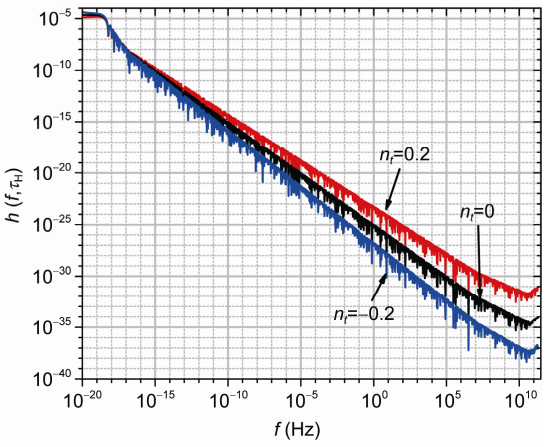


图 3 (网络版彩色)谱指数 n_t 不同值下的谱 $h(f,\tau_H)$

Figure 3 (Color online) Spectrum $h(f,\tau_H)$ for various index n_t for fixed r=0.2 and α_t=0

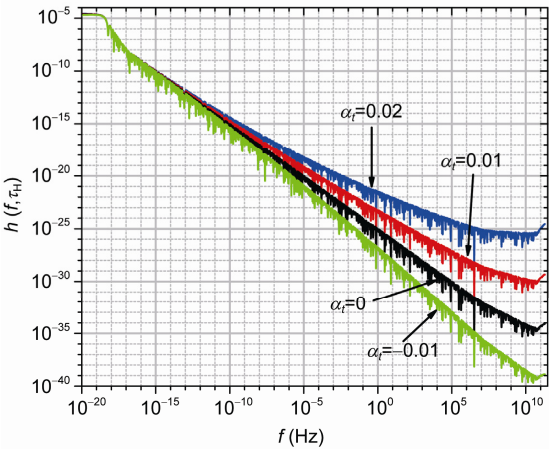


图 4 (网络版彩色)跑动谱指数α_t不同值下的 $h(f,\tau_H)$

Figure 4 (Color online) $h(f,\tau_H)$ for various running index α_t for fixed r=0.2 and n_t=0

一极高频段, f=(10^6~10^9) Hz, 强磁场中的高斯激光束方法工作频率在f~10^9 Hz[39], 直接探测RGW导致的径向扰动光子流. 按照我们估算，采用偏振激光束和目前技术，其敏感度与RGW还差大约5个量级[40]. 还有波导腔探测器工作频率f=(10^6~10^9) Hz, 引力波导致腔内电磁场偏振方向发生转动，通过时间积累可推测引力波[41], 实际探测RGW尚差许多量级[42].

RGW功率谱在高频段$f>10^{11}$ Hz导致对应的自关联函数发散，其原因和能动张量的高频发散类似. 文献中对于用前述的绝热规则化方法存在不同处理和结论，主要原因是这些研究依赖于慢滚动近似(slow-roll approximation)，不够精确的. 我们利用RGW的解析解，澄清了原初功率谱定义的一些模糊不清的概念，对于功率谱用3种不同处理，给出了从观测来说一致的结果，功率谱及谱指数n_t, α_t实质上不受规则化的影响.

二中频段, f=(10^{-3}~10^3) Hz, 地面激光干涉探测器LIGO[43], VIRGO[44], GEO[45], KAGRA[46], AIGO[47], LIGO-India[48]等计划已在进行，还有低温共振棒EXPLORER[49]、谐振腔MAGO[50], 空间激光干涉仪探测器LISA[51](f ~10^{-3} Hz)等探测器. 我们计算表明[52], LISA比LIGO更有可能探测到RGW. 天体剧烈爆发过程辐射出的中高频引力波也在此频段. RGW可被单激光探测器所测到的条件:

$$h_c(f)\sqrt{F/2f}\geqslant\tilde{h}_f, \tag{37}$$

其中角度因子F=2/3, $h_c(f)=h(f,\tau_H)/\sqrt{2}$ 是RGW的特征谱, $\tilde{h}_f$ 是探测器的敏感度. 目前LIGO和VIRGO的S5和S6的实测数据，尚未发现引力波. 据此得到对RGW参数的限制，见图5. n_t<0.612当α_t=0和r=0.2, 以及α_t<0.0272当r=0.2和n_t=0. 对n_t限制不及对α_t的严紧[53,54].

LIGO的两个单探测器H1和L1，以及VIRGO工作在f~100 Hz附近. 通过双干涉仪的交叉关联，信噪比公式[38]

$$SNR_{ij}=\frac{3H_0^2}{10\pi^2}\sqrt{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}f\,\frac{\gamma^2(f)\Omega_g^2(f)}{f^6P_i(f)P_j(f)}\right]^{1/2}, \tag{38}$$

其中$P_i(f)$是探测器i的噪声谱, $\gamma^2(f)$是两台探测器之间已知的重叠函数. 给定带有参数 (r,β,α_t) 的理论谱，可计算出信噪比[53]. 目前没有探测到引力波，可以

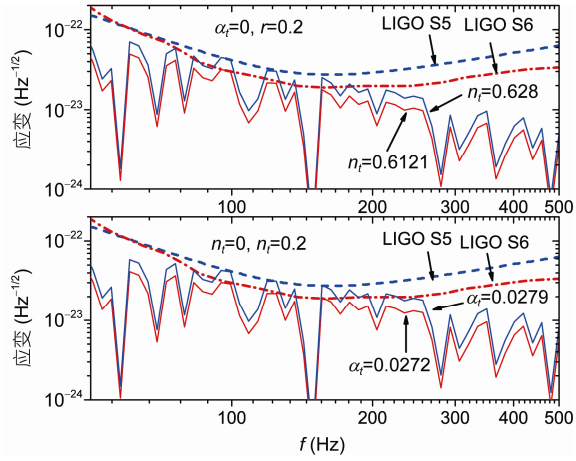


图 5 (网络版彩色)S5 和 S6 的单探测器数据限制 RGW 的谱指数

Figure 5 (Color online) The spectrum $h(\nu,\tau_H)$ for various index β

对RGW限制. 对能量密度的限制为$\Omega_0<6.9\times10^{-6}$[55]. 对$n_t$=0和$r$=0.2, 我们利用S6数据得到对跑动谱指数的限制:

$$\alpha_t < 0.02093. \tag{39}$$

把多个干涉探测器的数据关联起来, 其探测能力比双干涉仪有所提高, 对RGW给出更紧的限制. 把4个探测器形成6个不同的对, 每一对都对总的信噪比有贡献. 还可以采用四关联体方法, 直接将四探测器关联. 计算结果表明, 宇宙核合成和CMB来对 β 和 α_T 做限制, 比目前多个激光干涉仪的限制更严格.

三低频段, f ~10^{-9} Hz. 在此频段的RGW幅度较高. 通过对多个毫秒脉冲星的脉冲到达时刻的残差做长期监测, 就形成引力波探测器. 目前有PPTA[56]、EPTA[57], NANOGrav[58], SKA[59]等. 我们计算给出探测RGW的可能性以及对RGW的限制[59,60]. 我国的射电望远镜和FAST[61]也可用于引力波探测. 脉冲星射电天线阵, 将是RGW探测主要方法之一. 关键问题是如何从噪音中剥离出引力波的信号.

四极低频段, f=(10^{-18}~10^{-16}) Hz, 对应的波长接近于宇宙的视界, 此频段RGW具有最大的幅度

表 1 固定 r=0.2、不同α_t, n_t值, 由 S5 和 S6 数据给出的 SNR_{HL}

Tabe 1 SNR_{HL} from S5 and S6 data for various of α_t, n_t at r=0.2

α_t,n_t	S5	S6
0, 0	1.9×10^{-9}	2.2×10^{-9}
0.005, 0.1	2.3×10^{-5}	3.1×10^{-5}
0.01, 0.2	3.0×10^{-1}	4.2×10^{-1}
0.015, 0.2	4.4×10^{1}	6.6×10^{1}

$|h|$~10^{-5}, 它诱导出CMB的磁场形(旋度型)偏振谱 C_l^{BB}, 就为直接探测引力波提供了良机.

4 RGW诱导的CMB的偏振解析谱

在红移z~1100的复合时期, RGW与密度扰动一起产生了CMB的温度各向异性和偏振[62]: C_l^{TT}, C_l^{EE}, C_l^{TE}, C_l^{BB}. 理论分析表明, 密度扰动只诱导出前3个谱[63], 而RGW则诱导全部4个谱, 即 C_l^{BB} 仅可能由RGW产生[64,65]. 探测到 C_l^{BB} 的存在, 就是直接探测到RGW. 我们用解析方法积分光子气体的Boltzmann方程 $\frac{\partial f}{\partial\tau}+\hat{n}^i\frac{\partial f}{\partial x^i}=-\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial f}{\partial\nu}-q(f-J)$, 其中Sachs-Wolfe项 $\frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{2}\frac{\partial h_{ij}}{\partial\tau}\hat{n}^i\hat{n}^j$ 是由度规扰动h_{ij}产生, 包括密度扰动和RGW[66,67], 分别给出了近似解析解. 其中由RGW所产生、包括了宇宙再电离过程影响[68]的偏振模:

$$\beta_l(\tau_H)=-\frac{1}{10}i^l\Big[A_1(\kappa_r)D_d(k)\Delta\tau_d\dot{h}(\tau_d)j_l(k(\tau_d-\tau_H))+A_2(\kappa_r)D_r(k)\Delta\tau_r\dot{h}(\tau_r)j_l(k(\tau_r-\tau_H))\Big], \tag{40}$$

和温度各向异性模 $\alpha_l(\tau_H)$ 的解析公式, (40)中 $\dot{h}(\tau_d)$ 和 $\dot{h}(\tau_r)$ 分别是在退耦和再电离时刻的值. 对波数积分给出磁场型偏振谱:

$$C_l^{BB}=\frac{1}{16\pi}\int k^2\mathrm{d}k\left|\frac{2(l+2)\beta_{l-1}(\tau_H)}{(2l+1)}+\frac{2(l-1)\beta_{l+1}(\tau_H)}{(2l+1)}\right|^2, \tag{41}$$

以及其他3个谱, 与CMBfast数值计算在大角度上符合. 图6画出了RGW诱导的再电离CMB四个谱 C_l^{XX}. 再电离过程导致 C_l^{EE} 和 C_l^{BB} 在大角度($l\approx5$)上产生了鼓包, 原来的主峰高度也相应降低. WMAP[31], Planck[32]等已经观测到谱 C_l^{TT}, C_l^{EE}, C_l^{TE} 的大角度部分, 这是密度扰动和RGW共同贡献的. 按照BICEP2[33]和Planck[34]的综合分析, 目前 C_l^{BB} 的数据包含了噪声, 尚不足以确定RGW的存在. 未来的 C_l^{BB} 的探测是有希望首次直接探测RGW的重要途径.

5 双星引力波辐射

另一大类引力波源, 是致密天体的并和、超新星爆发过程、致密双星互绕、脉冲星振动等. 致密双

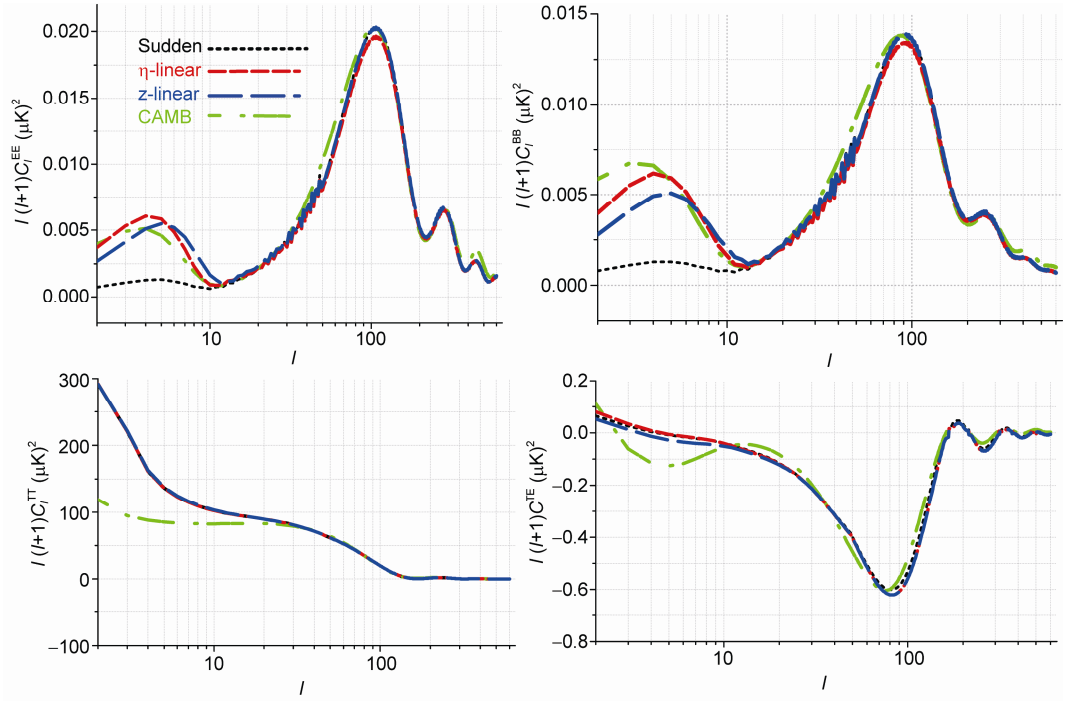


图 6 (网络版彩色)RGW 诱导的再电离的 C_l^{XX}

Figure 6 (Color online) Reionized C_l^{XX} induced by RGW

星互绕是稳定的源，如OJ287，由两颗巨黑洞互绕，质量 $m_1=1.84\times10^{10}M_\odot$，$m_2=1.46\times10^8M_\odot$，周期大约11年，位置在红移$z$=0.306[69]. 由后牛顿近似到3.5 PN的加速度公式[20]:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{Gm}{r^2}[(1+A_{1\mathrm{PN}}+A_{2\mathrm{PN}}+A_{2.5\mathrm{PN}}+A_{3\mathrm{PN}}+A_{3.5\mathrm{PN}})\boldsymbol{e}_r +(B_{1\mathrm{PN}}+B_{2\mathrm{PN}}+B_{2.5\mathrm{PN}}+B_{3\mathrm{PN}}+B_{3.5\mathrm{PN}})\boldsymbol{v}], \tag{42}$$

其中$m=m_1+m_2$, $\boldsymbol{v}$为相对速度, $\boldsymbol{e}_r$是径向单位矢量, A_{iPN}和B_{iPN}为第i阶PN修正项. 作为近似，固定大黑洞位置，拟合7次爆发观测数据，给出到3.5PN阶小黑洞轨道见图7，其中距离的单位是m_1/c^2. 统计分析表明，3.5 PN阶的卡方优于2.5PN的[70]. 引力辐射的能流和角动量流: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\dot{E}_N+\dot{E}_{1\mathrm{PN}}+\dot{E}_{2\mathrm{PN}}$, $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\dot{J}_N+\dot{J}_{1\mathrm{PN}}+\dot{J}_{2\mathrm{PN}}$, 其中 $\dot{E}_N$ 和 $\dot{J}_N$ 是质量四极矩 Q_{ij}^{TT} 贡献，后面是1和2PN的修正. 我们发现1PN阶项能流 $\dot{E}_{1\mathrm{PN}}$ (图8)、角动量流 $\dot{J}_{1\mathrm{PN}}$ 都是负的，各自与牛顿阶 $\dot{E}_N$ 和 $\dot{J}_N$，以及与2PN阶 $\dot{E}_{2\mathrm{PN}}$ 和 $\dot{J}_{2\mathrm{PN}}$ 的符号相反. 到2PN阶的引力波形

$$h_{TT}^{ij}=\frac{2G\mu}{R}\left[Q^{ij}+P^{1/2}Q^{ij}+PQ^{ij}+P^{3/2}Q^{ij}+P^2Q^{ij}\right]_{TT}, \tag{43}$$

其中 $R\simeq1469$ Mpc是双星到地球的距离，$\mu=m_1m_2/m$, 图 9 画出观测方向⊥轨道面的两个偏振分量 $h_{TT}^{+}=\frac{1}{2}(h^{xx}-h^{yy})$, $h_{TT}^{\times}=h^{xy}$. OJ287的引力辐射很强，在频段10^{-9} Hz附近幅度高达$|h_{TT}^{ij}|\sim10^{-15}$，与在此频段RGW的幅度相当，可作为PTA天线阵等探测器的

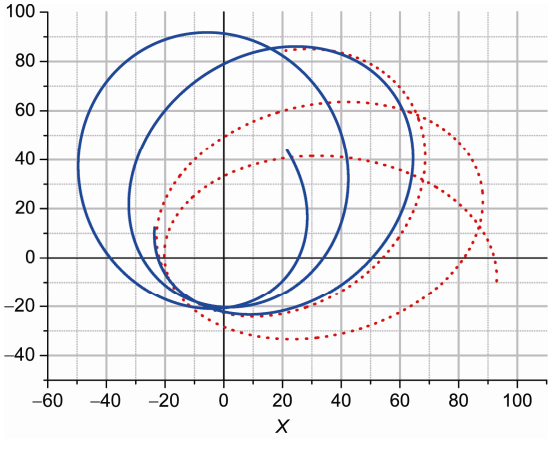


图 7 (网络版彩色)双黑洞 OJ287 在 150 周期之后, 3.5PN 轨道(实线)超过 2.5PN 轨道(虚线)

Figure 7 (Color online) 3.5PN orbit (solid) surpasses that of 2.5PN (dash) after 150 periods. The unit is $m_1/c^2\simeq184$ AU

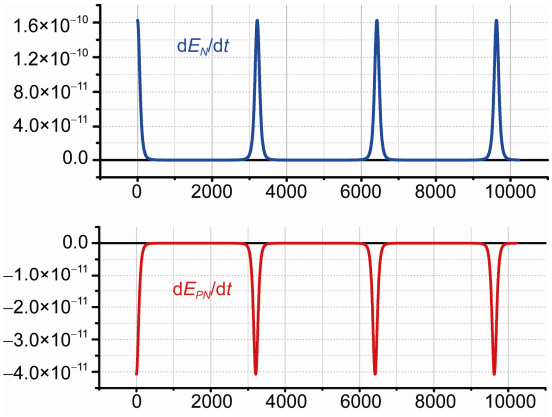


图 8 (网络版彩色)OJ287 的能流，$\dot{E}_N>0$，$\dot{E}_{1PN}<0$

Figure 8 (Color online) The energy fluxes $\dot{E}_N>0$, $\dot{E}_{1PN}<0$

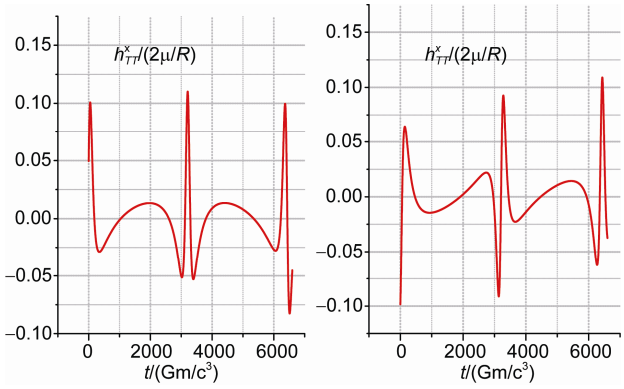


图 9 (网络版彩色)3.5PN 轨道给出的 OJ287 引力辐射的波形 h_{ij}^{TT}

Figure 9 (Color online) The waveform h_{ij}^{TT} using 3.5PN orbit

长期监视目标.

推广到OJ287双星互绕的一般情况，得到了大小黑洞的后牛顿轨道，尺度分别为 $y_1\sim 1m_1/c^2$, $y_2\sim 100m_1/c^2$发现双星的质心有漂移的现象，即使初始的质心位置 $\vec{G}$ 取在原点，随着演化出现 $\vec{G}\neq 0$. 经过分析表明，在后牛顿框架下，这种质心漂移是近似理论自身带来的，不可避免的. 但漂移是很小的，$|\vec{G}|\sim 10^{-6}(m_1/c^2)$，观测相应也很小，在通常的双星轨道和引力辐射计算中可以忽略. 还计算了黑洞具有自旋的情况[71].

6 展望

引力波作为爱因斯坦方程的双曲部分，是广义相对论所不可缺少的. 如果引力波不存在，作为广义相对论就要修改. 另外，SNIa型超新星观测发现现阶段宇宙是加速膨胀的[72,73]. 按照广义相对论来解释观测，要求存在一种压强为负的暗能量[74,75]. 若暗能量不存在，就要跳出广义相对论框子，重新审查引力理论. 引力波是天文学、物理学长期存在的重大问题. 目前探测试验一直在进行，以期最终直接探测到引力波.

参考文献

1 Einstein A. The Principle of Relativity. Berlin: Dover Publications, 1916. 688
2 Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A. Gravitation. New York: Freeman, 1973
3 Will C M. The confrontation between general relativity and experiment. Living Rev Rel, 2005, 9: 3
4 Weinberg S. Gravitation and Cosmology. New York: Wiley, 1972
5 Peebles P J E. Principles of Physical Cosmology. Princiton: Princiton University Press, 1993
6 Weisberg J M, Nice D J, Taylor J H. Timing measurements of the relativistic binary pulsar PSR B1913+16. Astrophys J, 2010, 722: 1030
7 Grishchuk L P. Amplification of gravitational waves in an isotropic universe. Sov Phys JETP, 1975, 40: 409–415
8 Starobinsky A A. Relict gravitation radiation spectrum and initial state of the universe. JETP Lett, 1070, 30: 682–690
9 Allen B. Stochastic gravity-wave background in inflationary-universe models. Phys Rev D, 1988, 37: 2078–2085
10 Grishchuk L P. The implications of microwave background anisotropies for laser-interferometer-tested gravitational waves. Class Quantum Grav, 1997, 14: 1445–1460
11 Grishchuk L P. Relic gravitational waves and their detection. Lect Notes Phys, 2001, 562: 167–189
12 Zhang Y, Er X Z, Xia T Y, et al. An exact analytic spectrum of relic gravitational waves in an accelerating universe. Class Quantum Grav, 2006, 23: 3783–3800
13 Zhao W, Zhang Y. Relic gravitational waves and their detection. Phys Rev D, 2006, 74: 043503
14 Maggiore M. Gravitational Waves. Oxford: Oxford University Press, 2008
15 Ford L H, Parker L. Quantized gravitational wave perturbations in Robertson-Walker universes. Phys Rev D, 1977, 16: 1601–1608
16 Blanchet L, Faye G. General relativistic dynamics of compact binaries at the third post-Newtonian order. Phys Rev D, 2001, 63: 062005

17 Landau L D, Lifshitz E M. The Classical Theory of Fields. Oxford: Pergamon Press Ltd, 1979
18 Su D Q, Zhang Y. Energy-momentum pseudotensor of relic gravitational waves in an expanding universe. Phys Rev D, 2012, 85: 104012
19 Blanchet L. Gravitational radiation from post-newtonian sources and inspiralling compact binaries. Living Rev Rel, 2002, 5: 1–109
20 Nissanke S, Blanchet L. Gravitational radiation reaction in the equations of motion of compact binaries to 3.5 post-Newtonian order. Class Quantum Grav, 2005, 22: 1007
21 Will C M, Wiseman A G. Gravitational radiation from compact binary systems: Gravitational waveforms and energy loss to second post-Newtonian order. Phys Rev D, 1996, 54: 4813–4848
22 Barker B M, O'Connell R F. Gravitational two-body problem with arbitrary masses, spins, and quadropole moments. Phys Rev D, 1975, 12: 329–335
23 Matarrese S, Mollerach S, Bruni M. Relativistic second-order perturbations of the Einstein–de Sitter universe. Phys Rev D, 1998, 58: 043504
24 Bergmann P G, Thompson R. Spin and angular momentum in general relativity. Phys Rev, 1953, 89: 400–415
25 Duan Y S, Wang Y T. The conservation of energy-momentum in general relativity (in Chinese). Sci China Ser A, 1983, 4: 343–351 [段一士, 王有堂. 广义相对论中的能量动量守恒定律. 中国科学A辑, 1983, 4: 343–351]
26 Isaacson R. Gravitational radiation in the limit of high frequency. II. Nonlinear terms and the effective stress tensor. Phys Rev, 1968, 166: 1272–1282
27 Abramo L R W, Brandenberger H R, Mukhanov V F. The energy-momentum tensor for cosmological perturbations. Phys Rev D, 1997, 56: 3248–3258
28 Brill D, Hartle J B. Method of the self-consistent field in general relativity and its application to the gravitational geon. Phys Rev, 1964, 135: B271
29 Giovannini M. Dynamical backreaction of relic gravitons. Phys Rev D, 2005, 73: 083505
30 Unruh W. Cosmological long wavelength perturbations. arXiv:astro-ph/9802323
31 Bennett C L, Hill R, Hinshaw G, et al. First-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Foreground emission. Astrophys J Suppl, 2003, 148: 1–30
32 Planck collaboration. Planck intermediate results. XXX. The angular power spectrum of polarized dust emission at intermediate and high Galactic latitudes. Astron Astrophys A, 2014, 22: 571–595
33 Ade P A R, Aikin R W, Barkatset D, et al. Detection of B-mode polarization at degree angular scales by BICEP2. Phys Rev Lett, 2014, 112: 241101
34 Mortonson M J, Seljakb U. A joint analysis of Planck and BICEP2 B modes including dust polarization. J Cosmol Astropart Phys, 2014, 10: 1–12
35 Weinberg S. Damping of tensor modes in cosmology. Phys Rev D, 2004, 69: 023503
36 Miao H X, Zhang Y. Analytic spectrum of relic gravitational waves modified by neutrino free streaming and dark energy. Phys Rev D, 2007, 75: 104009
37 Wang S, Zhang Y, Xia T Y, et al. Modifcations by the QCD transition and e^+e^- annihilation of the analytic spectrum of relic gravitational waves in the accelerating universe. Phys Rev D, 2008, 77: 104016
38 Allen B, Romano J D. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities. Phys Rev D, 1999, 59: 102001
39 Li F Y, Tang M X, Shi D P. Electromagnetic response of a Gaussian beam to high-frequency relic gravitational waves in quintessential inflationary models. Phys Rev D, 2003, 67: 104008
40 Tong M L, Zhang Y. Using a polarized maser to detect high-frequency relic gravitational waves. Phys Rev D, 2008, 78: 024041
41 Cruise A M, Ingley R M J. A prototype gravitational wave detector for 100 MHz. Class Quantum Grav, 2006, 23: 6185–6193
42 Tong M L, Zhang Y. Detecting very-high-frequency relic gravitational waves by a waveguide. Chin J Astron Astrophys, 2008, 8: 314–328
43 The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration. Improved Upper Limits on the Stochastic Gravitational-Wave Background from 2009–2010 LIGO and Virgo Data. Phys Rev Lett, 2014, 113: 231101
44 Frasca S, Frasconi F, Freise A, et al. Status of VIRGO. Class Quantum Grav, 2005, 22: S869–S880
45 Willke B, Aufmuth P, Aulbert C, et al. Status of GEO 600. Class Quantum Grav, 2004, 21: S417–S423
46 Kuroda K, Nakatani I, Ohashi M, et al. Status of LCGT. Class Quantum Grav, 2010, 27: 084004
47 Barriga P, Blair D G, Coward D, et al. AIGO: A southern hemisphere detector for the worldwide array of ground-based interferometric gravitational wave detectors. Class Quant Grav, 2010, 27: 084005
48 Iyer B, Souradeep T, Unnikrishnan C, et al. LIGO-India Technology Report. https://dcc.ligo.org/cgi-bin/DocDB/ShowDocument?docid=75988 (2011); Fairhurst S. Improved source localization with LIGO India. arXiv:1205.6611v2

49 Astone P, Babusci D, Bassan M, et al. All-sky incoherent search for periodic signals with Explorer 2005 data. Class Quant Grav, 2008, 25: 114028

50 Ballatini R, Bernard P, Calatroni S, et al. Microwave apparatus for gravitational waves observation. INFN Tech Note, 2005, INFN/TC-05/05; arXiv:gr-qc/0502054

51 Amaro-Seoane P, Aoudia S, Babaket S, et al. Low-frequency gravitational-wave science with eLISA/NGO. Class Quantum Grav, 2012, 29: 124016

52 Tong M L, Zhang Y. Relic gravitational waves with a running spectral index and its constraints at high frequencies. Phys Rev D, 2009, 80: 084022

53 Zhang Y, Tong M L, Fu Z W. Constraints upon the spectral indices of relic gravitational waves by LIGO S5. Phys Rev D, 2010, 81: 101501

54 Chen J W, Zhang Y, Zhao W, et al. Initial condition of relic gravitational waves constrained by LIGO S6 and multiple interferometers. arXiv: [gr-qc]1410.7151

55 Abbott B P, Abbott R, Acernese F, et al. An upper limit on the stochastic gravitational-wave background of cosmological origin. Nature, 2009, 460: 990–994

56 Hobbs G. Gravitational wave detection using high precision pulsar observations. Class Quant Grav, 2008 25: 114032–114040

57 van Haasteren R, Ferdman R D, Gonzalez M E, et al. Placing limits on the stochastic gravitational-wave background using European Pulsar Timing Array data. Mon Not R Astron Soc, 2011, 414: 3117–3129

58 Demorest P B, Ferdman R D, Gonzalezet M E, et al. Limits on the stochastic gravitational wave background from the North American nanohertz observatory for gravitational waves. Astrophys J, 2013, 762: 94–121

59 Zhao W, Zhang Y, You X P, et al. Constraints of relic gravitational waves by pulsar timing arrays: Forecasts for the FAST and SKA projects. Phys Rev D, 2013, 87: 124012

60 Tong M L, Zhang Y, Zhao W, et al. Using pulsar timing arrays and the quantum normalization condition to constrain relic gravitational waves. Class Quantum Grav, 2014, 31: 035001

61 Nan R, Li D, Jin C, et al. The five-hundred-meter aperture spherical radio telescope (FAST) project. Int J Mod Phys D, 2011, 20: 989–1015

62 Basko M M, Polnarev A G. Polarization and anisotropy of the primordial radiation in an anisotropic universe. Sov Astron, 1980, 24: 268–272

63 Cai Z, Zhang Y. Analytic spectra of CMB anisotropies and polarization generated by scalar perturbations in synchronous gauge. Class Quant Grav, 2012, 29: 105009

64 Zaldarriaga M, Seljak U. All-sky analysis of polarization in the microwave background. Phys Rev D, 1997, 55: 1830–1843

65 Kamionkowski M, Kosowsky A, Stebbins A. Statistics of cosmic microwave background polarization. Phys Rev D, 1997, 55: 7368–7379

66 Zhao W, Zhang Y. Analytic approach to the CMB polarization generated by relic gravitational waves. Phys Rev D, 2006 74: 083006

67 Xia T Y, Zhang Y. Analytic spectra of CMB anisotropies and polarization generated by relic gravitational waves with modification due to neutrino free-streaming. Phys Rev D, 2008, 78: 123005

68 Xia T Y, Zhang Y. Approximate analytic spectra of reionized CMB anisotropies and polarization generated by relic gravitational waves. Phys Rev D, 2009, 79: 083002

69 Valtonen M J, Lehto H J, Nilsson K, et al. A massive binary black-hole system in OJ287 and a test of general relativity. Nature, 2008, 452: 851–860

70 Wu S G, Zhang Y, The orbit computation of binary black hole OJ287—A 3.5-th order post-newtonian approximation. Chin Astron Astrophys, 2012, 36: 353–365

71 Cheng B, Zhang Y. OJ287: Post-Newtonian calculation in harmonic coordinate and pulsar timing residual confirmation. Comm Theor Phys, 2015, 64: 54–58

72 Riess A G, Filippenko A V, Challis P, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. Astron J, 1998, 116: 1009–1038

73 Perlmutter S, Aldering G, Goldhaber G, et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovea. Astrophys J, 1999, 517: 565–586

74 Zhang Y. Origin of the negative pressure for relativistic boson condensate. Chin Phys Lett, 2000, 17: 76–78

75 Zhang Y. State of matter for effective Yang-mills fields and energy conditions. Gen Relativ Gravit, 2002, 34: 2155–2161

Relic gravitational wave in universe and gravitational radiation of binary

ZHANG Yang

Department of Astronomy, Key Laboratory for Researches in Galaxies and Cosmology, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

We report the results of our systematic studies of gravitational wave in general relativity, including relic gravitational wave (RGW) and gravitational radiation of binary. First we introduce the gravitational wave field equation and physical concepts involved, and discuss the nonlinear field equation containing second order terms of perturbations, the energy-momentum tensor of gravitational wave, its short-wavelength average, the definition of pressure, and removal of high-frequency divergences, etc. We present the exact solution of RGW, which covers the whole cosmic expansion history, from inflation to the present accelerating stages. We give the power spectrum, the spectral energy density and pressure, which are valid at any time and wavenumber, discuss the issue of the primordial spectrum defined during inflation, and give a brief review of current detections at various wave-bands, focus mainly on laser interferometers, give the signal-noise ratios and constraints upon RGW. We also present the analytical spectrum of magnetic polarization induced by RGW. Finally, we present the results of our study of OJ287 as a binary black holes, and give the the orbit, the energy flux, and waveform, and also discuss the shifting of the center-of-mass.

general relativity, energy-momentum tensor of gravitational wave, relic gravitational wave, microwave background radiation, gravitational radiation, binary OJ287

doi: 10.1360/N972015-01041