求解天气预报方程组的分解算法

曾庆存　　袁重光

（中国科学院大气物理研究所）

一、引　言

将一个复杂的物理过程分解为两个或多个较简单的过程而逐个计算，然后再叠加或综合，这就是所谓"分解算法"．这种方法可使计算逻辑简化，又可大大节省计算时间．以天气预报中的正压原始方程为例，记 $x \equiv (x_1, x_2, \cdots\cdots)$ 为空间坐标，t 为时间，这时预报问题为求解下列初值问题

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = A_1 F + A_2 F, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to 0} F(x,t) = F^{(0)}(x), \tag{2}$$

其中 $F^{(0)}$ 为已知函数(初始场)，A_1 和 A_2 分别对应于适应过程和演变过程(平流变化)的算子，关于方程的具体形式见下节．这里为简便计算，在(1)式中还略去了其它过程．我们已证明过[1]，在一般情况下适应过程是一个快速过程，演变过程则是一个缓变过程，二者在时间尺度上是可以区分开来的．A_1 的主要部分是线性算子，在适应过程的特征时间之内，过程 A_2 对 A_1 的影响是微小的，因此用分解算法求解(1)式一般将会有好结果．这就是分解算法的物理基础．

算子 A_1 和 A_2 本来是非线性的，依赖于解 F，即 $A_1 = A_1(F)$，$A_2 = A_2(F)$．但在时段 t_n 内可近似地取 A_1 为常定的算子(仍记为 A_1)，而解则可取作

$$F_1(x, t_n) = F^{(0)}(x) + \int_0^{t_n} A_1 F_1(x, t')dt', \tag{3a}$$

$$F(x, t_n) = F_1(x, t_n) + \int_0^{t_n} A_2(F_1)F(x, t')dt' = F_1 + (\delta F)_2. \tag{3b}$$

当然也可以用别的方法计算 $(\delta F)_2$．

在文献[1, 2]中都曾建议了一些按(3)式计算的具体算法，1962年作者又将上述算法简化为差分形式*，此时 A_1 是平流算子，A_2 是湍流耗散算子(是一个比 A_1 慢的缓变过程)，先不考虑 A_2，按 $\frac{\partial F}{\partial t} = A_1 F$ 相应的差分格式计算 n 个时间步长 $n\delta t$，然后再计算一次 $A_2 F$，取

$$(\delta F)_2 = (A_2 F) n\delta t,$$

这正好和每计算 n 步加一次平滑相等价，对于线性方程来说，当 $\delta t \to 0$ 时还证明了解的收敛性．这种类型的具体的分解算法可以直接应用来解原始方程，后来我们在1964—1965年设计的灵活性格式[4]中就包括了这样的分解方法．

本文1979年8月29日收到．

* 曾庆存：平滑算子和湍流耗散效应的等效性(1962年在地球物理研究所的学术报告；部分内容载于文献[3])．

二、灵活性差分格式和分解算法

在地图投影坐标系中取矩形区域和矩形网格 (x_i, y_j)，$1 \leqslant i \leqslant I$，$1 \leqslant j \leqslant J$，空间步长和时间步长为 δx、δy 和 δt，在计算 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}$ 时在区域内点用中央差，在边界点上相应的偏微商用单向差分，统记这样的差分为 $\frac{\delta}{\delta x}$ 和 $\frac{\delta}{\delta y}$；再引入记号

$$\left(\frac{\delta_t^+ F}{\delta t}\right)_{ijn} \equiv \frac{F(x_i, y_j, t_{n+1}) - F(x_i, y_j, t_n)}{\delta t},$$

$$\bar{F}_{ijn} \equiv [F(x_i, y_j, t_{n+1}) + F(x_i, y_j, t_n)]/2.$$

按文献 [3, 4] 可取正压大气的灵活性差分格式如下：

$$\frac{\delta_t^- \phi^{***\mu}}{\delta t} = -\alpha D(\boldsymbol{W}^* \bar{u}) + \beta\left[-\bar{\phi}^{***} M \frac{\delta \bar{\phi}'^{**}}{\delta x} + \bar{f}^{**}\bar{\phi}^{***}\bar{v}^{**}\right], \tag{4}$$

$$\frac{\delta_t^+ \phi^{***v}}{\delta t} = -\alpha D(\boldsymbol{W}^* \bar{v}) + \beta\left[-\bar{\phi}^{***} N \frac{\delta \bar{\phi}'^{**}}{\delta y} - \bar{f}^{**}\bar{\phi}^{***}\bar{u}^{**}\right], \tag{5}$$

$$\kappa \frac{\delta_t^+ \phi'}{\delta t} = -\kappa\alpha D\left(\frac{\bar{\phi}'}{\bar{\phi}^{***}} \boldsymbol{W}^*\right) - \beta D\left(\frac{\tilde{\phi}}{\bar{\phi}^{***}} \boldsymbol{W}^*\right), \tag{6}$$

其中

$$\begin{cases} D_{ij}(\boldsymbol{W}^* F) \equiv (MN)_{ij}\left[\dfrac{\partial U^* F}{\delta x} + \dfrac{\partial V^* F}{\delta y}\right]_{ij}, \\ \boldsymbol{W}^* \equiv \boldsymbol{i}U^* + \boldsymbol{j}V^* = \boldsymbol{i}\dfrac{\bar{u}^*\bar{\phi}^{***}}{N} + \boldsymbol{j}\dfrac{\bar{v}^*\bar{\phi}^{***}}{M}, \\ \phi^{***} = \tilde{\phi} + \beta'\phi'^{***}, \\ u^* = u_\phi^* + \beta'' u_\chi^*, \quad v^* = v_\phi^* + \beta'' v_\chi^*. \end{cases} \tag{7}$$

$\frac{\partial}{\delta x}$ 和 $\frac{\partial}{\delta y}$ 在内点表示另一种中央差，例如

$$\left(\frac{\partial U^* F}{\delta x}\right)_{ij} = \frac{1}{4\delta x}[(U_{i+1,j}^* + U_{i,j}^*)(F_{i+1,j} + F_{i,j}) -$$

$$(U_{i,j}^* + U_{i-1,j}^*)(F_{i,j} + F_{i-1,j})],$$

而在边界上表另一种单向差分，例如

$$\left(\frac{\partial V^* F}{\delta y}\right)_{iJ} = \frac{1}{2\delta y}[4V_{i,J}^* F_{i,J} - (V_{i,J}^* + V_{i,J-1}^*)(F_{i,J} + F_{i,J-1})].$$

u^{**}，v^{**} 和 ϕ'^{**} 为 u，v 和 ϕ' 的某种空间平滑场，u^*，v^* 或 ϕ'^{***} 则是按另外方法算得的平滑场，$\bar{f}$ 为折合科氏参数，$\tilde{\phi}$ 为 ϕ 的全场平均值（常数），而 (u_ϕ, v_ϕ) 和 (u_χ, v_χ) 各为 $\boldsymbol{v}$ 的有旋部分和无旋部分，M 和 N 为投影放大率；α，β，κ，β'，β'' 本应为 1，取 $\kappa = 0$ 就是无辐散近似；而 α，β 等取不同的常数值，则得到各种灵活性格式，可用来调正系统的移速（调 α）和快波对发展过程的影响（调 β），也可用来作分解算法，若取 $\beta' = \beta'' = 0$，$u^{**} = u$ 等等，则在刚壁条件下有退化的总能量守恒方程

$$\frac{\delta_t^+}{\delta t}\sum_i \sum_j \left(\frac{u^2 + v^2}{2} + \kappa \frac{\phi'^2}{2\tilde{\phi}}\right)_{ij} (MN)_{ij}^{-1}\varepsilon_i\varepsilon_j\delta x\delta y = 0, \tag{8}$$

其中 $\varepsilon_i\varepsilon_j(MN)_{ij}^{-1}\delta x\delta y$ 为网格单元的面积. (8) 式表明这种格式是计算稳定的. 事实上, 若不取 $\beta'=\beta''=0$, 但 $\bar{u}^*$, $\bar{v}^*$ 和 $\bar{\phi}^{***}$ 改为 $\bar{u}$, $\bar{v}$ 和 $\bar{\phi}$ 的直接按空间取某种平均值, 则此时 $\bar{\phi}^{***}$ 在局部地区几近于常数, 而 $\bar{u}^*$ 和 $\bar{v}^*$ 的散度也很小, 故这样做也可得到接近于取 $\beta'=\beta''=0$ 的结果, 计算仍然是稳定的, 实例计算也如此. 这样做比直接取 $\beta'=\beta''=0$ 要方便得多和更准确些. 而若取 $u^{**}\fallingdotseq u$ 而为 u 的平均值等, 则右端项更为光滑, 当然会得到更光滑的结果.

1. 分解算法 I: 在 t_n 至 t_{n+m} 内取 $\alpha=0$ 和 $\beta=1$ (或 $\beta>1$)进行计算, 次取 $\beta=0$, $\alpha=m$ (或 $\alpha>m$) 进行计算, 所得结果算作 t_{n+m} 时刻的场. 然后再依上述方法循环下去. 这样做就是先计算适应过程导致的变化, 然后再计算一次平流过程的变化(总时段为 $t_{n+m}-t_n=m\delta t$, 故有 $\alpha=m$). 计算顺序也可以反过来. 一般取 $m>1$. 若取 $m=1$, 则就时间步长的分解来说, 这种分解法大体上退化为 Марчук 的分解法[5]. 但是求解非线性问题不可避免要用迭代法, 而取 $m>1$ 就可减小求解非线性问题的次数, 故可大大缩短计算时间.

2. 分解算法 II: 将算法 I 作改进, 注意到对于线性算子 A 而言, 格式

$$\frac{\delta_t^+F}{\delta t}=A\bar{F}, \tag{9}$$

又可分解为向前差和向后差两步, 即

$$\begin{cases}\dfrac{F^{n+a}-F^n}{a\delta t}=AF^n, & \text{(10a)}\\[2ex] \dfrac{F^{n+1}-F^{n+a}}{b\delta t}=AF^{n+1}, & \text{(10b)}\end{cases}$$

$a+b=1$, $a>0$, $b>0$, 这样做在计算 (10a) 时不必迭代, 而计算 (10b) 时只要计算 AF^{n+1} 而非 $A\bar{F}$, 故可减少算术运算. 当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时 (10) 即是 (9), 而当 $b>a$ 时 (10) 成为耗散格式, 还可进一步加大 δt. 这些就使改进的分解算法更省计算量. 因此无论取 $\alpha=0$ 或是 $\beta=0$ 我们都将 (4)—(5) 式再作 (10) 式那样的分解.

3. 分解算法 III: 由于计算隐式差分时必须用迭代法, 仍然费时. 但若在 (10) 式中取 $b>a$, 则可在计算 (10b)式时只迭代一定次数即中止, 可证这时仍有计算稳定性, 这样又可进一步节省计算时间. 这就是算法 III.

由于用算法 II、III 比较省时, 这样还可减小 δt (但 $m\delta t$ 不变), 使计算精度提高. 并且由于 δt 减小, 又可减少寄生波, 进一步提高计算量的光滑性, 从而还可取 ϕ'^*, $\bar{u}^{**}$ 等即是 ϕ' 和 $\bar{u}$ 等, 取消平滑运算, 又进一步减少运算量, 进一步加快计算速度.

三、计 算 实 例

我们作了许多实际计算, 取中纬度带的 $\delta x=\delta y=300$ 公里, $\delta t=20$ 和 15 分钟, 按原格式("全隐式")和上述三种分解算法作计算, 取 $m\delta t=1$ 和 1.5 小时, 只作分解计算, 其它运算不变(即未取消平滑运算 $\bar{u}^{**}$ 等). 如以"全隐式"所需计算时间为 1, 则分解算法 I、II、III (只取二次迭代)分别需时为 0.55、0.42 和 0.25, 估计取消平滑运算后, 算法 III 可省时至 0.2.

所有实例均计算至 10 天以上, 仍能保持计算稳定, 场不紊乱. 图 1—3 为一个实例. 如记 $H^{(0)}$ 为初始高度, $H_k^{(N)}$ 为 N 时刻的预报高度, $k=0,1,2,3$ 分别代表按"全隐式", 算法 I、II、III 计算, 量

$$\sigma_{kk'} \equiv \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (H_k^{(N)} - H_{k'}^{(N)})_{ij}^2 (MN)_{ij}^{-1} \varepsilon_i \varepsilon_j \delta x \delta y}{\sum_i \sum_j (MN)_{ij}^{-1} \varepsilon_i \varepsilon_j \delta x \delta y}},$$

可以表示分解算法的相对精度，对于图 1—3 的例子，取 $k = 0$，$N\delta t = 48$ 小时，得 $\sigma_{01} = 30$ 米，$\sigma_{02} = 31.6$ 米，$\sigma_{03} = 34$ 米，可见计算结果相差很小，其实这种差别在等高线图中几乎分析不出来.

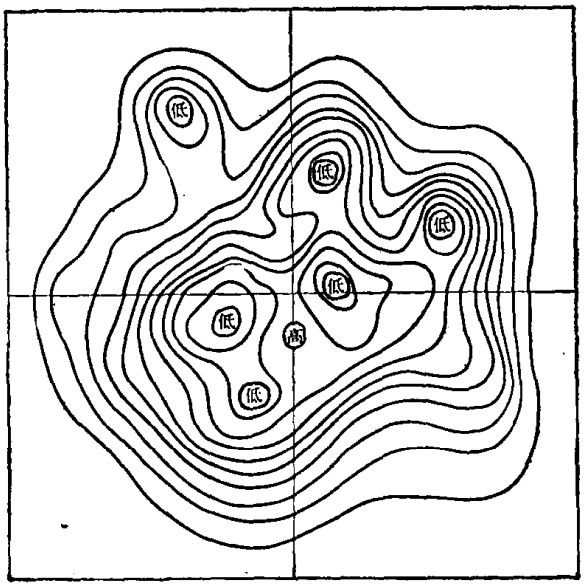


图 1　500mb 初始 ϕ 场
1977 年 3 月 17 日 12 时

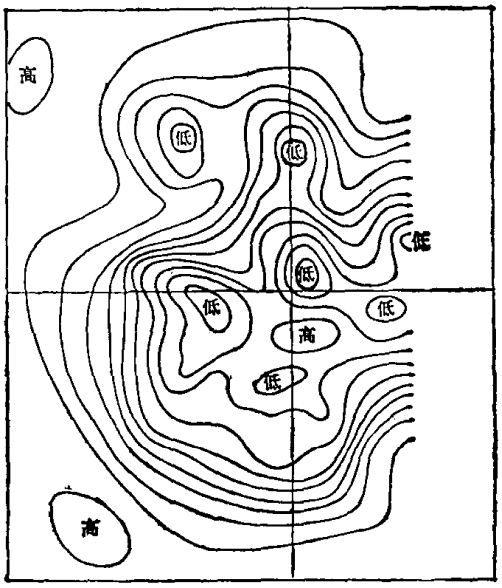


图 2　500mb ϕ 场（48 小时实况）
1977 年 3 月 19 日 12 时

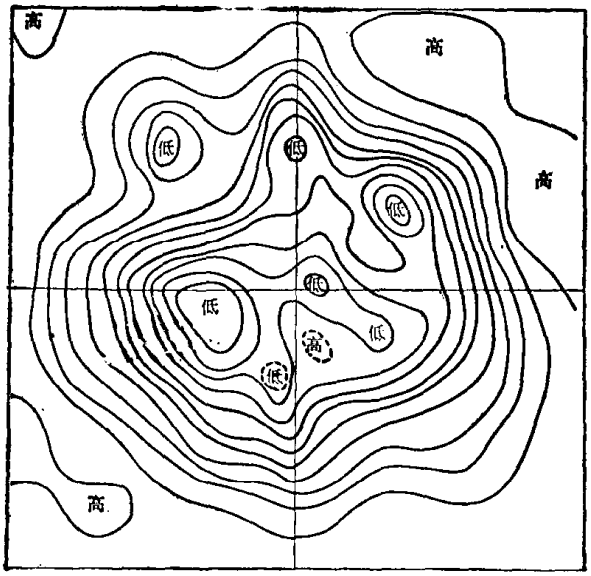


图 3　48 小时预告 500mb ϕ 场（按分解算法 III）

参　考　文　献

[1] 曾庆存，气象学报，**33** (1963)，2、3.
[2] Кибель И. А., *ДАН СССР*, **118** (1958), 4.
[3] 曾庆存，数值天气预报的数学物理基础，第二卷，科学出版社，即将出版.
[4] 曾庆存、季仲贞、袁重光，全国第二次数值预告会议文集，科学出版社，1977.
[5] Марчук Г. И., *Численные методы в прогнозе погоды*, Л. Гидрометеоиздат., 1967.