数学中的一些转化概念

李国平　　吴学谋

（武汉大学）（中国科学院数学计算技术研究所）

“转化过程是一个伟大的基本过程，对自然的全部认识都综合于对这个过程的认识中.”（恩格斯：《反杜林论》）所以从转化的观点来分析数学中的问题及一些学科分枝中的数学关系，就会使我们对许多规律的认识更深刻、更具有概括性. 在这种思想引导下我们具体做了一些工作，涉及数学的一些分枝，以及理性力学和泛系分析[5-8,14-17]中的一些数学问题.

一

1. 在文献[9]中引入了赋半序范空间的概念(它以赋范空间及拓扑空间为特例并兼具两者的特点)，研究了算子方程及空间转化的稳定性问题，求得方程或空间转化的扰动误差(文献[9]称为原收敛性，原误差，包括截断误差和舍入误差的概念)到方程解的误差(次收敛性，次误差)的定量转化关系. 对方程、空间转化、算子、解等在一定条件下都可用半序空间的元来赋范. 这时可得：1）线性赋半序范空间的线性转化族对族参数的一致连续性与一致有界性等价，因而稳定性与逆转化一致有界性等价；若原误差 $\leqslant \varepsilon$，则次误差 $\leqslant M\varepsilon$，M 为与逆转化的半序范有关的量. 2）对线性拓扑空间 $E^{\pm}$，E^{+} 为第二纲的，$A_\eta: E^{-} \to E^{+}$ 为线性，当 $A_\eta e_\eta^- = e_\eta^+$ 原收敛时，则稳定性、次收敛性和 A_η^{-1} 的一致有界性等价，而次收敛性导致稳定性与 A_η^{-1} 的一致有界性. 对于差分方程及泛函方程的稳定性，这些结果包括了以 Neŭmann, Lax, Richtmyer, Mignot, Канторович, Люстерник, Мейман, Рябенький, Филиппов 的已知各种结果为特例，并把各种稳定性及证明统一起来.

2. 把关于完全性与封闭性的等价定理推广到不完全不封闭的情况，分别用残缺度与逼近度来度量，证明它们是相等的，当它们为零时即 Banach 定理.

3. 在文献[10]中精密化了 Михлин 关于 Галёркин 方法的收敛性定理，求出了误差估计，在相同条件下，按能量范数，Галёркин 解的误差与能量最优逼近度是同级的(对特征值也有类似结果)，并讨论了 $A_0^{-1}K$ 型算子的全连续性及对一些用于微分方程的条件，对一般椭圆型方程的估计比 Ильин 的结果好.

二

1. 条件 A：1）设 $E^{\pm}$ 为二线性空间，集 $E_* \subset E^{+} \cap E^{-}$，$M(f^{-})$ 为按 E^{-} 之范数 $\|\cdot\|^{-}$ 是 E_* 对 $f^{-} \in E^{-}$ 的某一最优逼近元；2）对 $e \in E_*$ 有 $\|e\|^{+} \leqslant g(\|e\|^{-})$，$g$ 为非降，$\|\cdot\|^{+}$ 为 E^{+} 中之

本文 1977 年 5 月 11 日收到.

范数；3）对 $f^{\pm}\in E^{\pm}$ 有 $p\in E_*$ 使得 $\|f^{\pm}-p\|^{\pm}\leqslant\varepsilon^{\pm}$.

M转化引理 在条件 A 之下，有估计

$$\|f^{+}-M(f^{-})\|^{+}\leqslant\varepsilon^{+}+g(2\varepsilon^{-}).$$

条件 B：1）设 E 为线性赋范空间，有两种范 $\|\cdot\|^{\pm}$，S：$E\to E$；2）对任何 e_1，$e_2\in E$，$\|S(e_1)-S(e_2)\|^{+}\leqslant\psi(\|e_1-e_2\|^{-})$，$\psi$ 非降；3）对 $f^{\pm}\in E$ 存在 $p\in E$，$\|f^{\pm}-p\|^{\pm}\leqslant\varepsilon^{\pm}$，$\|S(p)-p\|^{+}\leqslant\eta$.

S转化引理 由条件 B 可得

$$\|f^{+}-S(f^{-})\|^{+}\leqslant\varepsilon^{+}+\eta+\psi(\varepsilon^{-}).$$

条件 C：1）$E_{\pm}$ 为二线性空间，分别定义范数 $\|\cdot\|_{\pm}$；2）$\lambda\in[a,b)$，$a\geqslant 0$，$E_{\lambda}\subset E_{-}$，$E_{\lambda_1}\subset E_{\lambda_2}$，$\lambda_1\leqslant\lambda_2$；3）由 e_1，$e_2\in E_{\lambda}$ 导致 $\pm(e_1-e_2)\in E_{\sigma(\lambda)}$，$\sigma(\lambda)$ 为 λ 之某函数；4）H：$UE_{\lambda}\to E_{+}$ 为线性，并对 $e\in E_{\lambda}$ 有 $\|He\|_{+}\leqslant\varphi(\lambda,\|e\|_{-})$，$\varphi(x,y)$ 对 x，y 为非降；5）对某 $f^{-}\in E_{-}$ 有 $p_{\lambda}\in E_{\lambda}$，$\|f^{-}-p_{\lambda}\|_{-}\leqslant\varepsilon(\lambda)$，$\varepsilon(t)$ 非升；6）$u>1$ 为任给常数.

P转化引理 在条件 C 假设下

$$\|Hp_{\lambda}-Hp_{\eta}\|_{+}\leqslant\frac{2}{\log u}\int_{\lambda}^{u\eta}\varphi\left[\sigma(t),2\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\right]\frac{dt}{t}.$$

MSP 转化引理已推广于更一般的范数（例如半序范或把连续模看成范数，也不一定三角不等式成立）. P 转化引理实际上是许多（不同范数意义下的误差）转化定理、反定理（包括 Paley-Wiener 型定理、Котельников 抽样定理）和许多嵌入定理（包括有关函数的扩展及边界性质）的有关算法的一种统一概括. 例如在一定条件下，由 $\|f^{-}-p_{\lambda}\|_{-}$ 的已知估计即可对与 f^{-} 所对应或等价的某 $f^{+}\in E_{+}$ 估计 $\|f^{+}-Hp_{\lambda}\|_{+}$ 或 $\|f^{+}\|_{+}$.

2. 基于 MSP 转化引理，从新探讨了多变量实函数构造、泛函空间的嵌入不等式、高维直交多项式级数、三角插补等问题，除得一些新型的结论外，可得到 Никольский, Бернштейн, Тиман, Ильин, Харрик 及 Zygmund, Marcinkiewicz 等的一些定理的改进与推广. 对复函数构造也得到许多新结果，包括一些已知工作的推进或补充：Келдыш 和 Мергелян 在逐段光滑区域或曲线上的直接定理及关于 Bieberbach 多项式的误差估值，Walsh, Sewell, Russell 关于误差转化及用有界函数逼近的工作等. 另外得到了一些新型的多项式不等式，以及直交级数、多连通集（包括网络）上的 Faber 级数和不连通集上的统一逼近在不同泛函空间中的误差估计. 并在新的基础上讨论复数域上的调和分析与概周期函数，包括得到 Besicovitch, Paley, Wiener 和 Степанов 等的一些结果的改进与推广[1,9-12].

3. 基于 MSP 转化引理，对高维有限单元法及 Spline 进行了新的误差分析，得到在各种泛函空间中的估计[11]. 例如对 m 维集 D 上的解 $f\in C^{(r)}(D)$ 的有限单元法 $M(f)\in C^{(s)}(D)$（这里 $s\leqslant r$，并要求单元的多项式高至上述协调条件成立），有估计 $\|f-M(f)\|_{C^{(s)}(D)}=O\{h^{\sigma}\omega(h)\}$，这里 h 为单元最大直径，$\sigma=\min(r-s,r-1-\alpha)$，$\alpha=2\lambda+m$，$\lambda=\max(o,s-1)$，$\omega(h)=\omega_k(h,f,C^{(r)}(D))$ 为 f 在相应泛函空间中的 k 级连续模. 因此对平面（空间）问题，若真解三次（四次）连续可微就保证了有限单元法及其导数一致收敛. 另外对早年为 Walsh, Ahlberg 等一再提及的 Spline 误差问题（$f\in C^{(l)}$，$\|f-S_{\Delta}\|_{C^{(s)}}=O(|\Delta|^{l-t})$?）得到了更确切的解决：$\|f-S_{\Delta}\|_{C^{(s)}}=O(|\Delta|^{l-t}\omega_k(|\Delta|,f,C^{(l)}))$. 同时对于高维星形集 D，设 $f\in C^{(r)}(D)$，T_n 为 f 的高维 Taylor 展式部分和，$n<r$，则有统一估计 $\|f-T_n\|_{C^{(t)}(E)}\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{R}{n},f,C^{(r)}(E)\right)$，

E 为 D 之任何直径，R 为最长直径长度，M 与 D, E, R, t, n 无关.

三

1. 在变动连续介质电动力学中也存在许多数学转化关系. 若不计及粘滞性，并且外力有位函数，压力与密度 ρ 间有函数关系，这种模式包括了具有运流电流的某些气流模型及传统的电磁流体力学的模型（电导率分别为 $\sigma \approx 0$ 和 $\sigma \approx \infty$）. 当 $\sigma \approx 0$ 时，质荷比 $\rho\rho_*^{-1}$ 沿流线守恒(Lichnerowicz, Carstoiu, 1965)，因而当某一初始时刻的区域 $\rho\rho_*^{-1}$ 近似于常数时，则以后它不会因区域的变动而变动，这时我们可得下列结论[8,13].

1) 下列一系列命题或关系是等价的: (a) 速度 $\mathbf{V}$ 环流守恒; (b) 磁感强度 $\mathbf{B}$ 通量守恒; (c) $\mathbf{B}$ 是 I 型场 (即 $\partial\mathbf{B}/\partial t + \mathrm{rot}(\mathbf{B}\times\mathbf{V}) = 0$); (d) $\mathbf{B}$ 是 II 型场 (即 $d(\mathbf{B}/\rho)/dt = (\mathbf{B}/\rho)\cdot \mathrm{grad}\,\mathbf{V}$); (e) 电磁场的矢量势 $\mathbf{A}$ 环流守恒; (f) $\mathbf{B}$ 管管强沿管道和对变动的 t 都守恒（简称时空守恒); (g) 涡度 $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{V}$ 是 I 型场; (h) $\boldsymbol{\omega}$ 是 II 型场; (i) $\boldsymbol{\omega}$ 通量守恒; (j) $\boldsymbol{\omega}$ 管管强时空守恒; (k) $\mathrm{rot}(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}) = 0$, $\mathbf{E}$ 为电场强度.

2) 全速度 $\mathbf{V}_+ = \mathbf{V} + \frac{\rho_e}{\rho}\mathbf{A}$ 的环流守恒.

3) 全涡度 $\mathbf{W} = 2\boldsymbol{\omega} + \frac{\rho_e}{\rho}\mathbf{B}$ 的通量守恒；管强时空守恒; $\mathbf{W}$ 是 I 型、II 型场.

4) ρ_m/ρ_e', ρ_m/ρ 守恒，ρ_m 为磁密度，ρ_e' 为极化电荷密度.

5) 电极化强度及磁化强度、在高速旋转时的 $\mathbf{E}$ 及电位移通量守恒并都是 II 型场.

6) ρ_e/ρ 的最大增加方向与质点所受 Lorentz 力平行(简称性质 P).

7) 次涡度 $\mathbf{W}_- = \left(\mathrm{grad}\,\frac{\rho_e}{\rho}\right)\times\mathbf{A} = 0$.

8) $\mathbf{V}_+$ 环流守恒与 $\mathbf{W}$ 通量守恒等价(这命题包括 Carstoiu 的一结果).

2. 对电磁流体力学，$\sigma \approx \infty$，这时有[13]

1) $\mathbf{B}$, $\boldsymbol{\omega}$ 是 I 型、II 型场，并且通量守恒，管强时空守恒.

2) $\mathbf{V}$, $\mathbf{A}$ 环流守恒.

3) 场具有性质 P.

其中 $\mathbf{B}$ 是 II 型场是原 Walén 的结果，$\mathbf{B}$ 通量守恒是 Cowling 的结果. $\mathbf{V}$ 环流守恒是 Thomson 定理的推广，解除了原来 Жигулев, Каплан 的条件 $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H}) = 0$ ($\mathbf{H}$ 为磁场强度). 关于 $\sigma \approx \infty$，更多的新结果可包括在下节关于一般的 σ 的结论中.

3. 我们称 n 个条件是广义等价的，是指其中之一成立，其余条件是两两等价的. 这时对一般 σ 有下列结果[13].

1) 下面三条件广义等价: (a) $\mathbf{B}$ 为 I 型、II 型场(这与 $\mathbf{B}$ 通量守恒等价)，或 $\rho_e = 0$; (b) $\mathbf{V}$ 环流守恒; (c) 场具性质 P.

2) 下面三条件广义等价: (a) $\mathbf{W}$ 为 I 型场; (b) $\mathbf{W}$ 为 II 型场; (c) $\left(\mathrm{grad}\,\frac{\rho_e}{\rho}\right)\cdot\mathbf{B} = 0$.

3) 下面两条件等价: (a) $\mathbf{W}$ 为 I 型场; (b) $\left(\mathrm{grad}\,\frac{\rho_e}{\rho}\right)\times\mathbf{E} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho_e}{\rho}\right)\mathbf{B} = 0$.

4) 下面两条件等价：(a) 超涡度 $\mathbf{W}_+ = \mathbf{W} + \left(\text{grad}\,\frac{\rho_e}{\rho}\right) \times \mathbf{A}$ 通量守恒；(b) $\mathbf{V}_+$ 环流守恒. 因此下面三条件广义等价：(a′) $\mathbf{W}$ 通量守恒；(b′) $\mathbf{W}_-$ 通量守恒；(c′) $\mathbf{V}_+$ 环流守恒(或与之等价的 $\mathbf{W}_+$ 通量守恒).

5) $\mathbf{B}$ 通量守恒与 $\mathbf{A}$ 环流守恒等价，因而下面三条件广义等价：(a) $\mathbf{A}$ 环流守恒；(b) $\mathbf{V}$ 环流守恒；(c) 场具性质 P.

6) 对一般的向量场 $\mathbf{C}$ 管强时空守恒的充要条件是它是一个旋量场，同时又是一个 I 型或 II 型场. 即下面三条件广义等价：(a) 管强时空守恒；(b) 为 I 型场或 II 型场；(c) 为一旋量场.

7) 对一般 σ，下面四条件等价：(a) ω 为 I 型场；(b) ω 为 II 型场；(c) ω 通量守恒；(d) $\text{rot}\left[\frac{\rho_e}{\rho}(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})\right] = 0$. 而且下面三条件广义等价：(a′) ω 为 I 型场；(b′) 场具性质 P；(c′) $\rho_e = 0$ 或 $\mathbf{B}$ 为 I 型场(或 $\mathbf{B}$ 为 II 型场，或 $\mathbf{B}$ 通量守恒).

由 6)，7) 可得到 $\mathbf{B}$，$\mathbf{W}$，ω 等管强时空守恒的一系列一般的充分条件. 关于 I 型、II 型场的一些命题可看成 Alfvén，Walén 等在磁流体力学中有关结果的一种推广[13].

参 考 文 献

[1] 吴学谋，计算机应用与应用数学，**11** (1976)，46—60.
[2] 吴学谋，华中工学院学报，**1** (1978)，186—193.
[3] 吴学谋，华中工学院学报，**3** (1978)，56—67.
[4] 吴学谋，武汉大学学报，**3**，**4** (1978)，87—105.
[5] 吴学谋，视觉的泛系分析及其应用 (I)，探索，**1** (1978).
[6] 王宗皓、吴学谋，气象系统工程，数值天气预报自动化系统(将出版).
[7] 吴学谋，泛系分析的一些概念，同上.
[8] 云天铨、王勤、吴学谋，理性力学与有关问题，力学规划调查报告，1978.
[9] 李国平、吴学谋，武汉大学学报，**2** (1975)，33—50.
[10] 李国平、吴学谋，武汉大学学报，**3** (1975)，24—44.
[11] 吴学谋，武汉大学学报，**3** (1977)，13—38.
[12] 郭友中、吴学谋，索波列夫空间的函数构造和方程近似解的误差，科学技术文献出版社，1964.
[13] 李国平、吴学谋，电磁风暴说与磁流体力学的等价理论，武汉大学数学物理学丛书，I，1972.