数值天气预报中三维平衡模式的古典解

穆　穆*

（上海交通大学应用数学系，上海）

一、引　言

在等压面坐标系下，从文献[1]中(1.25)、(1.26)、(1.27)、(1.30)与(1.31)式出发，对水平运动方程施行涡度运算，在准地转-准无辐散近似下，略去小项，大气的大尺度运动可用下述方程组描述[1,2].

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + \dfrac{1}{a} J(\psi, \zeta) + J(\psi, f) + \nabla\chi \cdot \nabla f - af \dfrac{\partial \omega}{\partial p} = 0, & (1.1) \\ \Delta\Phi - a\nabla f \cdot \nabla\psi - af\Delta\psi = 0, & (1.2) \\ \Delta\chi + a \dfrac{\partial \omega}{\partial p} = 0, & (1.3) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \Phi}{\partial p} + \dfrac{1}{a} J\left(\psi, \dfrac{\partial \Phi}{\partial p}\right) + \sigma(p)\omega = 0, & (1.4) \\ \Delta\psi = \zeta, & (1.5) \end{cases}$$

这里

$$J(F, G) \equiv \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial G}{\partial \lambda} - \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial G}{\partial \theta}\right),$$

$$\nabla F \cdot \nabla G \equiv \frac{\partial F}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial G}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial G}{\partial \lambda},$$

$$\Delta F \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}.$$

λ, θ, p, t 分别表示经度、余纬度、气压及时间. 未知函数 ψ, χ, Φ, ω 分别是流函数、势函数、位势高度与垂直速度. $f, a, \sigma(p)$ 为已知函数，分别为科里奥利参数、地球半径(常数)与静力稳定参数.

在数值天气预报中，通常用下述方法导出三维平衡模式：用Δ作用在(1.4)两边；将af乘以(1.1)后再用$\dfrac{\partial}{\partial p}$作用；把所得的两个方程相减，并利用(1.2)式以$\psi$表示$\Delta\Phi$，略去由于(1.1)式中第4项与(1.2)式中第2项所引起的小项，即得“ω-方程”. 进而，在该方程中，除去$J(\psi, f)$中的f外，用一合适的科里奥利参数f_0(常数)代替其余的f，得

$$\sigma\Delta\omega + a^2 f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \frac{1}{a} J\left(\Delta\psi, \frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) - f_0 J\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}, \Delta\psi\right)$$

本文1986年9月6日收到.

* 现在中国科学院大气物理研究所工作.

$$-af_0\frac{\partial}{\partial p}J(\phi,f)+\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{6}T_i(\phi)S_i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)=0, \tag{1.6}$$

这里 T_i, S_i 是关于 (λ,θ) 的系数光滑的二阶线性偏微分算子，满足恒等式：

$$\Delta J(F,G)\equiv J(\Delta F,G)+J(F,\Delta G)+\sum_{i=1}^{6}T_i(F)S_i(G),$$

其中 F, G 是单位球面 S^2 上的任意连续可微函数.

三维平衡模式 (1.1)、(1.2)、(1.3)、(1.5)、(1.6) 是一个重要的全球预报模式，它在某种意义上是文献 [2] p.262—263 中所考察模式的推广. 已有不少工作致力于寻求该类模式在初边值条件

$$\omega|_{p=p_0}=0,\ \omega|_{p=p_1}=0,\ \phi|_{t=0}=\phi_0 \tag{1.7}$$

之下的数值解(参见文献[1—3]及其所引文献)，这里 p_0 表示地表面，p_1 表示某一等压面($0<p_1<p_0$). 时空区域为 $S^2\times[p_1,p_0]\times[0,T]$，其中 T 是给定常数. 但是，关于该类问题适定性的研究，除了曾庆存[1]得到若干古典解的唯一性与广义解的存在性结果外，工作甚少. 本文证明了方程组 (1.1)、(1.2)、(1.3)、(1.5)、(1.6) 在初边值条件 (1.7) 之下局部古典解的存在唯一性.

二、迭代格式及先验估计

依通常文献 [4] 定义 Sobolev 空间 $H_r(S^2)$，记 $M=S^2\times[p_1,p_0]$，依文献 [5] 定义 Hörmander 空间 $H_{k,r}(M)$，它是 $C^\infty(M)$ 中函数在范数

$$\|u\|^2_{k,r}=\int_{p_1}^{p_0}\sum_{j=0}^{k}\|D_p^ju(p)\|^2_{H_{k+r-j}(S^2)}dp$$

下的完备化空间.

为行文方便，我们约定：若对任何 $(p,t)\in[p_1,p_0]\times[0,T]$，$\int_{S^2}\varphi(\lambda,\theta,p,t)ds=0$，则称 φ 具性质 (N).

若对 $\forall t\in[0,T]$，$\varphi(t)\in H_{k,r}(M)$ 且 $\lim\limits_{t\to t_0}\|\varphi(t)-\varphi(t_0)\|_{H_{k,r}(M)}=0(t_0\in[0,T])$，则记 $\varphi\in C^0([0,T];H_{k,r}(M))$.

采用如下迭代格式：

设整数 $k\geqslant 7$，实数 $r\geqslant 1$. 任给具性质 (N) 的函数 $\varphi\in C^0([0,T];H_{k-2,r+2}(M))$.

(i) 用分部积分，易证 $(a\nabla f\cdot\nabla\varphi+af\Delta\varphi)$ 具性质 (N). 由椭圆型方程理论[5]，存在 $\Phi\in C^0([0,T];H_{k-2,r+2}(M))$，具性质 (N) 且满足

$$\Delta\Phi-a\nabla f\cdot\nabla\varphi-af\Delta\varphi=0.$$

并且，成立先验估计式

$$\|\Phi\|^2_{H_{k-2,r+2}}\leqslant C\|\varphi\|_{H_{k-2,r+2}},\ \forall t\in[0,T]. \tag{2.1}$$

(ii) 由 $\sigma(p)$ 的物理意义可知 $\sigma(p)>0$，$\forall p\in[p_1,p_0]$. 易验证：若

$$\left\{\sigma\Delta\omega+a^2f_0^2\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}=0,\ \text{在}M\text{中};\ \omega|_{p=p_0}=0,\ \omega|_{p=p_1}=0\right\},$$

则 $\omega\equiv 0$. 故可解椭圆型方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \sigma\Delta\omega + a^2 f_0^2 \dfrac{\partial^2\omega}{\partial p^2} + \dfrac{1}{a} J\left(\Delta\varphi, \dfrac{\partial\Phi}{\partial p}\right) - f_0 J\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}, \Delta\varphi\right) \\ \quad - af_0 \dfrac{\partial}{\partial p} J(\varphi, f) + \dfrac{1}{a} \sum_{i=1}^{b} T_i(\varphi) S_i\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}\right) = 0, \text{ 在 } M \text{ 中}, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\omega|_{p=p_0} = 0, \quad \omega|_{p=p_1} = 0, \tag{2.3}$$

得 $\omega \in C^0([0, T]; H_{k-1,r}(M))$，且成立先验估计式

$$\|\omega(t)\|^2_{k-1,r} \leqslant c(\|\varphi(t)\|^2_{k-2,r+2} + 1)\|\varphi(t)\|^2_{k-2,r+2}, \ \forall t \in [0, T]. \tag{2.4}$$

(iii) 利用边界条件，可以验证由 (ii) 得到的 ω 具性质 (N)，故存在具性质 (N) 的 $\chi \in C^0([0,T]; H_{k-2,r+2}(M))$ 满足

$$\Delta\chi + a\frac{\partial\omega}{\partial p} = 0, \tag{2.5}$$

且成立先验估计式

$$\|\chi(t)\|^2_{k-2,r+1} \leqslant c\|\omega(t)\|^2_{k-1,r-1}, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.6}$$

(iv) 解双曲型方程 Cauchy 问题 ($p = p_0$, $p = p_1$ 皆为特征边界)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} + \dfrac{1}{a} J(\varphi, \zeta) + J(\varphi, f) + \nabla\chi \cdot \nabla f - af\dfrac{\partial\omega}{\partial p}, \text{ 在 } M \times (0, T) \text{ 中}, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\zeta|_{t=0} = \Delta\phi_0, \tag{2.8}$$

得 $\zeta \in C^0([0, T]; H_{k-2,r}(M)) \cap C^1([0, T]; H_{k-3,r}(M))$. 易验证 ζ 具性质 (N). 利用先验估计 (2.1), (2.4) 及 (2.6) 式，用能量积分的办法，可证下述估计式

$$\|\zeta(t)\|^2_{k-2,r} \leqslant c\left(\|\phi_0\|^2_{k-2,r+2} + \int_0^t (\|\varphi(\tau)\|^2_{k-2,r+2} + 1)\|\varphi(\tau)\|^2_{k-2,r+2} d\tau\right) \cdot \exp\left\{c\int_0^t \|\varphi(\tau)\|_{k-2,r+1} d\tau\right\}. \tag{2.9}$$

(v) 解椭圆型方程

$$\Delta\phi = \zeta, \tag{2.10}$$

得具性质 (N) 的 $\phi \in C^0([0, T]; H_{k-2,r+2}(M)) \cap C^1([0, T]; H_{k-3,r+2}(M))$ 且成立先验估计式

$$\|\phi(t)\|^2_{k-2,r+2} \leqslant c\|\zeta(t)\|^2_{k-2,r}, \ \forall t \in [0, T]. \tag{2.11}$$

综合上述估计并利用方程 (2.7)，得

$$\|\phi(t)\|^2_{k-2,r+2} \leqslant c_1\left(\|\phi_0\|^2_{k-2,r+2} + \int_0^t (\|\varphi(\tau)\|^2_{k-2,r+2} + 1)\|\varphi(\tau)\|^2_{k-2,r+2} d\tau\right) \cdot \exp\left\{c_2\int_0^t \|\varphi(\tau)\|_{k-2,r+1} d\tau\right\}, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.12}$$

$$\left\|\frac{\partial\phi}{\partial t}(t)\right\|^2_{k-3,r+2} \leqslant c_3(\|\phi(t)\|^2_{k-2,r+2} + \|\varphi(t)\|^2_{k-2,r+2} + 1)\|\varphi(t)\|^2_{k-2,r+2}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.13}$$

三、古典解的存在唯一性

依上述程序，得映射 $L: C^0([0, T]; H_{k-2,r+2}(M)) \to C^0([0, T]; H_{k-2,r+2}(M))$, $L\varphi = \psi$.

记 $A = 3c_1\|\phi_0\|^2_{k-2,r+2}$, $B = c_3(2A + 1)A$ (常数 c_1, c_3 分别是 (2.12), (2.13) 中之常

数). 取 t_0 充分小,由 (2.12), (2.13) 易验证 L 是从函数集合

$$S_{t_0}=\Big\{\varphi\in C^0([0,t_0];\ H_{k-2,r+2}(M))\cap C^1([0,t_0];\ H_{k-3,r+2}(M))\,|\,\varphi|_{t=0}=\phi_0,\ \varphi\text{具性质}$$

$$(N),\ \sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}\|\varphi(t)\|^2_{k-2,r+2}\leqslant A,\ \sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t)\right\|_{k-3,r+2}\leqslant B\Big\}$$

到自身的映射.

记 $\bar{S}_{t_0}$ 是 S_{t_0} 在 $C^0([0,t_0];\ H_{k-3,r+2}(M))$ 中的闭包. 利用上节证明先验估计的办法,可将 L 延拓为从 $\bar{S}_{t_0}$ 到 $\bar{S}_{t_0}$ 的连续映射. 因 $\bar{S}_{t_0}$ 是 $C^0([0,t_0];H_{k-3,r+2}(M))$ 中的紧凸集,由 Schauder 不动点定理,存在 $\phi\in\bar{S}_{t_0}$, 使 $L\phi=\phi$. 由嵌入定理,易见由 (i)—(v) 解得的 $(\phi,\Phi,\chi,\omega,\zeta)$ 即为定解问题在 $M\times[0,t_0]$ 中的古典解. 唯一性可用上节证明先验估计的办法得到,从略. 综上,得

定理 设 $\phi_0\in H_{k-2,r+2}(M)$, 整数 $k\geqslant 7$, 实数 $r\geqslant 1$. ϕ_0 具性质 (N). 这时,存在只与 $\|\phi_0\|_{k-2,r+2}$ 有关的 $t_0>0$, 使初边值问题 (1.1)、(1.2)、(1.3)、(1.5)、(1.6) 及 (1.7) 在 $M\times[0,t_0]$ 中存在唯一古典解 $(\phi,\Phi,\chi,\omega,\zeta)$ 且 ϕ,Φ,χ 具性质 (N). 此外,

$$\phi,\Phi,\chi\in C^0([0,t_0];H_{k-3,r+2}(M))\cap C^1([0,t_0];\ H_{k-3,r+1}(M));$$

$$\omega\in C^0([0,t_0];\ H_{k-2,r}(M))\cap C^1([0,t_0];\ H_{k-2,r-1}(M));$$

$$\zeta\in C^0([0,t_0];\ H_{k-3,r}(M))\cap C^1([0,t_0];\ H_{k-3,r-1}(M)).$$

参 考 文 献

[1] 曾庆存,数值天气预报的数学物理基础,第一卷,科学出版社,1979.

[2] Riphagen, H. A., Numerical weather prediction, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Tools and Case Studies* (Ed. D. P. Laurie), Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1983, 246—285.

[3] 小仓义光,大气动力学原理,科学出版社,1981.

[4] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[5] Hörmander, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1963.