研究通讯

关于拟总体列紧算子的一个注记

本文讨论算子的总体列紧逼近(参见 P. M. Anselone, *Collectively Compact Operator Approximation Theory*, Prontice Hall, Inc., Englewood, 1971), 拟总体列紧逼近 (阳名珠、朱广田, 数学物理学报, 3(1983), 4:419—439)与 p 阶逼近的一些关系.

定义 设 X 是一个 Banach 空间, $\{T_n\}$ 是 X 上的有界算子序列, T 为 X 上的算子,若对正整数 p 有:

$$\lim_{n\to\infty}\|(T_n - T)^p\| = 0,$$

则称算子叙列 $\{T_n\}$ p 阶逼近算子 T.

定理 1 设 H 是 Hilbert 空间, $\{T_n\}$ 是 H 上的线性有界自伴算子列, T_n 强收敛于算子 T, 则 $\{T_n\}$ p 阶逼近于 T 等价于 $\{T_n\}$ 按范数逼近于 T. 即:

$$\lim_{n\to\infty}\|(T_n - T)^p\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\|T_n - T\| = 0.$$

命题 设 X 是 Banach 空间, $\{T_n\}$ 在 X 上(拟) 总体列紧, T_n 强收敛于 T, 则 $\{T_n\}$ 二阶逼近算子 T.

定理 2 假设 $\{T_n\}$ 为 Banach 空间 X 中的线性算子, T 列紧且 T_n 强收敛于 T. 如果 $\{T_n\}$ p 阶逼近于 T, 则 $\{T_n\}$ 为 p 拟总体列紧的.

刘 佳 罗跃虎
(山西大学数学系,太原)

独立标准柯西变量的平方和分布

记 n 维随机向量 $Z = (z_1, \cdots, z_n)$、z_i $i = 1, \cdots, n$ 为 i. i. d. C(0, 1) 变量(标准柯西变量); $U = (u_1, \cdots, u_n)$ 服从 R^n 中单位圆上的均匀分布; $D = (D_1, \cdots, D_n)$ 服从参数为

$$\left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right)$$

的 Dirichlet 分布. Combanis, S., Keener, R., 和 Simons, G. (1983) 在 *Multivariate Analysis* 第 13 卷上证明了:

引理 1 对任何实数 $t_1, \cdots, t_n$ 有

$$\frac{t_1^2}{D_1} + \cdots + \frac{t_n^2}{D_n} \overset{d}{=} \frac{(|t_1| + \cdots + |t_n|)^2}{D_1}, \tag{1}$$

其中符号"$\overset{d}{=}$"表示两边的随机变量有相同的分布.

本文有结果:

定理 1 1°. $z_1^2 + \cdots + z_n^2$ 有 c.f.:

$$Ee^{it(z_1^2+\cdots+z_n^2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{itn}\Gamma^n\left(\frac{1}{2}, it\right), \tag{2}$$

其中 $\Gamma\left(\frac{1}{2}, it\right)$ 为不完全伽马函数.

2°. $z_1^2 + \cdots + z_n^2$ 有 p.d.f.:

$$f_{z_1^2+\cdots+z_n^2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2n}{(n+x)}$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k,r,0}\sum_{m=0}^{r+k}\frac{(-r-k)_m}{\left(\frac{1}{2}\right)_m}\right.$$

$$\times\left(\frac{x}{n+x}\right)^m + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k,r,1}$$

$$\left.\times\sum_{m=0}^{r+k}\frac{(-r-k)_m}{m!}\left(\frac{x}{n+x}\right)^m\right], \quad x>0 \tag{3}$$

其中常数列:

$$a_{k,r,l} = \binom{n}{2r+l}\left(-\frac{2}{\pi}\right)^r\left(\frac{2}{n}\right)^{r+k+\frac{1}{2}+l}$$

$$\times\Gamma\left(r+k+\frac{1}{2}+l\right)$$

$$\cdot\frac{1}{2^k}\sum_{k_1+\cdots+k_{2r+l}=k}$$

$$\times\frac{1}{\prod_{j=1}^{2r+l}(2k_j+1)k_j!}, \quad l = 0, 1 \tag{4}$$

这是因为: $z_1 \overset{d}{=} \frac{x_1}{|y_1|}$, x_1、$y_1 \sim N(0, 1)$ 彼此独