科 学 通 报
第 42 卷 第 1 期 Chinese Science Bulletin 1997 年 1 月

【研究简报】

关于 Jacobi 形式的一些新结果

王巨平
(中国科学技术大学数学系,合肥 230026)

关键词 Jacobi 形式 秩 系数估计

Eichler 等[1]首先对一维 Jacobi 形式进行了系统的研究,其结果由其他作者给予了大量补充. 高维 Jacobi 形式的研究则始于 Ziegler[2],他给出了高维 Jacobi 形式的严格定义和一些基本性质,这些是研究高维Jacobi形式的一个出发点. 本文则给出了一类Jacobi形式的秩的严

$$u^k \in L^\infty((0,\infty);\ W^{1,p}(M)),\ \partial_t u^k \in L^2((0,\infty);\ L^2(M)), \tag{10}$$

$$\int_0^T \|\partial_t u^k(\tau)\|^2_{L^2}(M)d\tau + \frac{1}{p}\int_M |\nabla u^k|^p(t)dM + \frac{k}{4}\int_M (|u^k|^2-1)^{2a}(t)dM \leqslant$$

$$\frac{1}{p}\int_M |u_0|^p dM, \text{对任意 } t>0, \tag{11}$$

由(10)式中空间的弱紧性,有$\{u^k\}_{k=1}^\infty$的子列,不妨设其本身,当 $k\to\infty$时

$$u^k \to u \quad \text{弱}^* \text{收敛于} \quad L^\infty_{loc}((0,\infty);\ W^{1,p}(M)),$$

$$\partial_t u^k \to \partial_t u \quad \text{弱收敛于} \quad L^2((0,\infty);\ L^2(M)).$$

从(11)式易得到

$$|u| = 1 \quad \text{a. e. 于} \quad \mathbb{R}_+ \times M,$$

且 u 在分布意义下满足方程(1)(详见文献[1]).

致谢 本工作为中国博士后基金部分资助项目.

参 考 文 献

1 Chen Y, Hong M, Hungerbühler N. Heat flow of p-harmonic maps with values into spheres. Math Z, 1994, 215: 25~35
2 Evans L C. Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations. CBMS Reg Conf Ser Math, Vol 74, Providence: Am Math Soc, 1990
3 Chen Y, Ding W Y. Blow up and global existence for heat flows of harmonic maps. Invent Math, 1990, 99: 567~578
4 Chen Y, Struwe M. Existence and partial regularity results for the heat flow for harmonic maps. Math Z, 1989, 201: 83~103
5 Chang K C, Ding W Y, Ye R. Paper finite-time blow up of the heat flow of harmonic maps from surfaces. Jour Diff Geom, 1989, 201: 69~74
6 Chang K C. Heat flow and boundary value problem for harmonic maps. Ann Inst H Poincaré, Anal Nonlinéaire, 1989, 6: 363~395
7 Chen Y. The weak solutions to the evolution problem of harmonic maps. Math Z, 1989, 201: 69~74

(1995-09-01 收稿,1996-04-05 收修改稿)

格表达式，并且证明了这类 Jacobi 形式或全为奇异，或全非奇异．对 Jacobi 尖形式则给出了几个非平凡系数估计，它们可被看成是 Kohnen 的结果在高维情形的推广．

1　几个引理

设 n，k，j 是固定正整数，s 是一个固定的 j 阶正定半整矩阵．记 Jacobi 群 $\Gamma_{n,j}^{J}$ 上的权 k，指标 s 的 Jacobi 形式空间为 $J_{k,s}$．假设 $\varphi\in J_{k,s}$ 有如下形式的 Fourier 展开

$$\varphi(z,\ w)=\sum_{t\geqslant 0,\text{半整}}\sum_{r\in\mathbb{Z}^{(n,j)}}c(t,r)\mathrm{e}^{2\pi i\sigma(tz+rw)},$$

这里 $c(t,r)$ 非零导出 $D(t,r)=\begin{vmatrix} t & \frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}r' & s \end{vmatrix}\geqslant 0$.

若对于一切 t 和 r，由 $c(t,r)\neq 0$ 可导出 $D(t,r)>0$，则称 φ 为一个尖形式．反之，若 $c(t,r)\neq 0$ 仅当 $\det D(t,r)=0$ 时成立，则称 φ 是奇异的．进一步，若有 $t-\frac{1}{4}rs^{-1}r'=0$，则称 φ 是强奇异的．我们分别记尖点形式、奇异形式和强奇异形式的集合为 $J_{k,s}^{0}$，$J_{k,s}^{s}$ 和 $J_{k,s}^{ss}$．如通常一样，约定零形式既不是尖形式，也不是奇异的．

引理 1[2]　设 $2s$ 是单模阵，则 $J_{k,s}$ 或者为零空间，或者 $J_{k,s}\simeq\left[\Gamma_n,\ k-\frac{j}{2}\right]$，后者记全模群 Γ_n 上权为 $k-\frac{j}{2}$ 的 Siegel 模形式空间．

引理 1 是文献[3]中性质 3.5 的一个推论．记上面的复线性空间的同构为 $\lambda_{k,s}$．

引理 2　设 $2s$ 为单模阵，则 $\varphi\in J_{k,s}^{s}$ 当且仅当 $\lambda_{k,s}(\varphi)$ 是奇异 Siegel 模形式．

证　考虑 theta 级数

$$\theta_{2s,0,0}(z,\ w)=\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^{(j,n)}}\mathrm{e}^{\pi i\sigma(2s(\lambda z\lambda'+2\lambda w'))},$$

不难验证 $\theta_{2s,0,0}$ 是一个权为 $\frac{j}{2}$，指标为 s 的 Jacobi 形式．

固定 $z\in\mathrm{H}_n$（记 n 级 Siegel 上半平面），记 $T_s(z)$ 为 $\mathbb{C}^{(j,n)}$ 上全纯函数 g 的集合，满足

$$g(w+\lambda z+\mu)=\mathrm{e}^{-2\pi i\sigma(s(\lambda z\lambda'+2\lambda w'))}g(w),\ \forall\,\lambda,\ \mu\in\mathbb{Z}^{(j,n)}.$$

由于 $(2s)^{-1}\mathbb{Z}^{(j,n)}=\mathbb{Z}^{(j,n)}$，故 $T_s(z)$ 是一维复空间，并且以 $\theta_{2s,0,0}$ 为基．若 $\varphi\in J_{k,s}$，则 $\varphi(z,*)\in T_s(z)$．由 z 的任意性，故有唯一表达式

$$\varphi(z,\ w)=f(z)\theta_{2s,0,0}(z,\ w),\tag{1}$$

这里 $f\in\left[\Gamma_n,\ k-\frac{j}{2}\right]$．反之，任给 $f\in\left[\Gamma_n,\ k-\frac{j}{2}\right]$，由(1)式确定的 φ 必属于 $J_{k,s}$．无妨取 $\lambda_{k,s}$ 为由(1)式所决定的同构．另一方面，直接验证可知 $\theta_{2s,0,0}$ 在 ∞ 处的 Fourier 展开系数为

$$c_\theta(t,\ r)=\begin{cases}1, & \text{若有 }\lambda\in\mathbb{Z}^{(j,n)}\text{ 使得 }r'=2s\lambda,\ t=\lambda' s\lambda,\\ 0, & \text{否则．}\end{cases}\tag{2}$$

设(1)式中函数 f 和 φ 的 Fourier 展开式分别为

$$f(z)=\sum_{t\geqslant 0\text{半整}}c(t)\mathrm{e}^{2\pi i\sigma(tz)},\quad \varphi(z,\ w)=\sum_{t,\ r}c(t,\ r)\mathrm{e}^{2\pi i\sigma(tz+rw)},$$

则有

$$c(t,\ r) = \sum_{\substack{t_1+t_2=t\\ r=r_2}} c(t_1)c_\theta(t_2,\ r_2),\text{对一切 } t,\ r. \tag{3}$$

由(2)式，$c_\theta(t_2,\ r_2)\neq 0$ 当且仅当 $r'_2 = 2s\lambda$，$t_2 = \lambda' s\lambda$ 对某个 $\lambda\in\mathbb{Z}^{(j,\ n)}$ 成立. 因此有 $\lambda = (2s)^{-1}r'_2$，$t_2 = \frac{1}{4}rs^{-1}r'$. 这表明，若 $c(t,\ r)\neq 0$，则 $c(t,\ r) = c\left(t - \frac{1}{4}rs^{-1}r'\right)$.

现在假设 $\varphi\in J^s_{k,s}$，则其 Fourier 展开系数 $c(t,\ r)\neq 0$ 仅当 $\det D(t,\ r) = \det s\cdot \det\left(t - \frac{1}{4}rs^{-1}r'\right) = 0$才有可能. 记 $\lambda_{k,s}(\varphi) = f$ 的任一非零 Fourier 系数为 $c(t_1)$. 由(2)式，取 $\lambda = (2s)^{-1}r'$，$t_2 = \lambda' s\lambda$，则 $c_\theta(t_2,\ r)\neq 0$. 若令 $t = t_1 + t_2$，由(3)式可知 $c(t,\ r) = c(t_1)\cdot c_\theta(t_2,\ r) = c(t_1)$. 此时必有 $t_2 = \frac{1}{4}rs^{-1}r'$，且 $t_1 = t - \frac{1}{4}rs^{-1}r'$. 因此 $\det(t_1) = 0$. 即 f 是奇异的.

反过来，设 f 是奇异的. 任取 φ 的一个非零 Fourier 系数 $c(t,\ r)$，由(3)式和式下至少有一项非零. 比如说 $c(t_1)c_\theta(t_2,\ r_2)\neq 0$. 由 $r_2 = r$ 和 $t_2 = \frac{1}{4}rs^{-1}r'$可知 $c(t,\ r) = c(t_1)$. 由假设 $\det(t_1) = 0$，因此有 $\det\left(t - \frac{1}{4}rs^{-1}r'\right) = 0$，从而有 $\det D(t,\ r) = 0$，即 $\varphi\in J^s_{k,s}$.

引理 3 设 $2s$ 是单模阵，则 $\varphi\in J^0_{k,s}$ 当且仅当 $\lambda_{k,s}(\varphi)$ 是 Siegel 尖形式.

引理 3 的证明与引理 2 的相似，故省略.

2 主要定理

定理 1 设 $2s$ 是单模阵，$\varphi\in J_{k,s}$ 非零，φ 的秩 $\operatorname{rank}\varphi$ 是指使得 Fourier 系数 $c(t,\ r)$ 非零的矩阵 $D(t,\ r)$ 的秩之最大者. 则 $\operatorname{rank}\varphi$ 等于 $j + \operatorname{rank}\lambda_{k,s}(\varphi)$.

证 选取 t，r 使得 $c(t,\ r)\neq 0$，并且 $\operatorname{rank}\varphi$ 等于 $\operatorname{rank}D(t,\ r)$. 由上节的(1)和(3)式可知 $c(t,\ r)$ 等于 $c\left(t - \frac{1}{4}rs^{-1}r'\right)$. 又

$$\begin{pmatrix} I_n & \frac{1}{2}rs^{-1}\\ 0 & I_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \frac{1}{2}rs^{-1}\\ 0 & I_j\end{pmatrix}' = D(t,\ r),$$

故有 $\operatorname{rank}\varphi\leqslant j + \operatorname{rank}\lambda_{k,s}(\varphi)$. 反过来，设 $c(t_1)\neq 0$ 并且 $\operatorname{rank}(t_1) = \operatorname{rank}\lambda_{k,s}(\varphi)$. 则存在 r 使得 φ 的系数 $c(t,\ r) = c(t_1)$，其中 $t = t_1 + \frac{1}{4}rs^{-1}r'$，再用上面的矩阵等式，有

$$\operatorname{rank}\varphi\geqslant \operatorname{rank}D(t,\ r) = \operatorname{rank}\operatorname{diag}(t_1,\ s) = j + \operatorname{rank}\lambda_{k,s}(\varphi), \tag{4}$$

这就证明了定理 1.

定理 2 设 $2s$ 是单模阵，$n\geqslant 2$，$\varphi\in J_{k,s}$ 非零，则 $\varphi\in J^s_{k,s}$ 当且仅当 $2k < n + j$. 进一步，若 $2k\neq j$，并且 $\varphi\in J^s_{k,s}$，则 $\operatorname{rank}\varphi$ 为 $n + 2(j - k)$.

证 由引理 2，$\varphi\in J^s_{k,s}$ 当且仅当 $\lambda_{k,s}(\varphi)$ 是奇异的. 由(4)式，$\lambda_{k,s}(\varphi)$ 奇异当且仅当 $2\left(k - \frac{j}{2}\right) < n$，这就证明了定理的第一部分. 定理的第二部分是文献[4]中 Siegel 模形式的秩公式的一个推广.

推论 设 $2s$ 是单模阵，$n\geqslant 2$，则

科 学 通 报
第 42 卷 第 1 期 Chinese Science Bulletin 1997 年 1 月

【研究简报】

具有相同结构正交表的产生

王兆军 张润楚
(南开大学数学系, 天津 300071)

关键词 正交表 陪集 附加因子 不可实施的因子水平组合

正交表在实际生产中有着广泛的应用, 在关于试验设计的文献中有许多正交表, 但当试验者选用正交表时, 会发现现有的任何一个正交表都含有不可实施的因子水平组合. 文献[1, 2]虽然考虑了可以避免这些不可实施的因子水平组合的正交表存在的充要条件和构造方法, 但是计算量比较大, 在实际中推广有些困难. 周知, 有相同定义结构的正交表不只一个, 而过去文献中仅给出了一个. 虽然文献中给出的正交表含有不可实施的因子水平组合, 但其余的则有可能避免这些组合. 如果确实如此, 则可以减少寻找能避免某些因子水平组合的正交表

---

1) $J_{k,s}=\{0\}$, 如果 $kn\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, 或 $2k<j$;

2) $J_{k,s}=J^{s}_{k,s}$, 如果 $kn\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, 且 $j<2k<n+j$;

3) $J_{k,s}=J^{w}_{k,s}$, 如果 $kn\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, 且 $2k=j$.

利用引理 3 和文献[5, 6]中的结果, 有下面的定理, 证明细节留给读者.

定理 3 设 $2s$ 是单模阵, $2k\geqslant j+n$, 又设 $\varphi\in J^{0}_{k,s}$, 记其 Fourier 系数为 $c(t, r)$, 令 $D=\det\left(t-\frac{1}{4}rs^{-1}s'\right)$, 则有 $c(t, r)=O(D^{k/2-1/2(j/2+\delta(n))})$, 其中 $\delta(n)$ 为 $\left(2n+\frac{1+(-1)^{n}}{2}+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$. 特别地, 若 $n=2$, k 为偶数, 则对任意正数 ε, 有 $c(t, r)=O(D^{k/2-(j+1)/4+\varepsilon})$.

Kohnen 曾在 $n=j=1$ 的情况下, 给出 $c(t, r)=O(D^{k/2-1/2+\varepsilon})$. 定理 3 可看作这一结果在高维情况下的某种推广. 我们猜测定理 3 中的结论不依赖于指标的单模性.

致谢 作者曾得到陆洪文教授和冯克勤教授的许多鼓励, 李云峰博士提供了 W Kohnen 的一篇预印稿, 在此一并谨致谢忱. 本工作为天元基金资助项目.

参 考 文 献

1 Eichler M, Zagier D. On the theory of Jacobi forms. Progress in Math 55, Boston: Birkhauser, 1984
2 Ziegler C. Jacobi forms of higher degree. Abh Math Sem Univ Hamberg, 1989, 59: 191~234
3 Shimura G. On certain reciprocity laws for theta functions and modular forms. Acta Math, 1979, 141: 35~71
4 Freitag E. Singular modular forms and theta relations. Lect Notes in Math, 1991, 1487: 70~80
5 Fomenko O. Fourier coefficients of Siegel cusp forms of genus n. J of Soviet Math, 1987, 38(4): 2 148~2 156
6 Kitaoka Y. Fourier coefficients of Siegel cusp forms of degree two. Nagoya Math J, 1984, 93: 149~171

(1995-12-26 收稿, 1996-06-20 收修改稿)

的计算量. 本文则是基于这样的考虑,提出了由一个正交表来产生所有的与之具有相同结构的正交表的一种构造方法.

设给定一个正交表 $L_{s^{n-p}}(s^n)$(即部分析因试验 s^{n-p}),并且以 $0,1,2,\cdots,s-1$ 表示诸因子的水平,处理组合以数字串表示,如在 3^3 全试验中,120 表示因子 A,B,C 分别处于中、高、低水平的处理组合,再以矩阵

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{Nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

的 N 行表示 s^{n-p} 设计的 $N=s^{n-p}$ 个处理组合,其中 $x_{ij}=0,1,2,\cdots,s-1(i=1,\cdots,N,j=1,\cdots,n)$ 表示第 j 个因子在 s^{n-p} 设计的第 i 个处理组合中所取的水平,则 s^{n-p} 设计的其他陪集可以如下产生:

1. 从 X 中任选 p 列(要保证这 p 列所对应的因子为附加因子),不妨记为 $j_1,\cdots,j_p$ 列 $(1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_p\leqslant n)$;

2. 任取 p 个界于 $0\sim s-1$ 间的正整数 $\eta_1,\cdots,\eta_p$;

3. 定义矩阵 X 关于第 $j_1,\cdots,j_p$ 列和常数 $\eta_1,\cdots,\eta_p$ 的示性为 n 维行向量

$$I(\eta_1,\cdots,\eta_p;n,j_1,\cdots,j_p)=(i_1,\cdots,i_n), \tag{2}$$

其中

$$i_l=\begin{cases}\eta_k, & \text{存在 } 1\leqslant k\leqslant p, \text{ 使得 } i_l=j_k,\\ 0, & \text{否则;}\end{cases} \quad l=1,\cdots,n. \tag{3}$$

4. 定义

$$X_c(\eta_1,\cdots,\eta_p;n,j_1,\cdots,j_p)=X+\mathbf{1}_N\cdot I(\eta_1,\cdots,\eta_p;n,j_1,\cdots,j_p)\ (\mathrm{mod}\ s), \tag{4}$$

其中 $\mathbf{1}_N=(\overbrace{1,\cdots,1}^{N})'$,$X_c(\eta_1,\cdots,\eta_p;n,j_1,\cdots,j_p)(\mathrm{mod}\ s)$ 表示矩阵 $X_c(\eta_1,\cdots,\eta_p;n,j_1,\cdots,j_p)$ 中的每个元素取 s 模.

则矩阵 $X_c(\eta_1,\cdots,\eta_p;n,j_1,\cdots,j_p)$ 的 N 行构成了 s^{n-p} 的某个陪集的 N 个处理组合. 由于 $\eta_1,\cdots,\eta_p$ 的取法有 s^p 种,故由(4)式构成的陪集也有 s^p 个(包括原来的 X),这 s^p 个陪集则为所求.

上述算法的正确性,可由下一个定理证明.

定理 对于 s^{n-p} 设计的每个陪集,只要知道其中的一个,如设计矩阵 X,则其余的都可以由 X 通过上述算法产生,且与 $j_1,\cdots,j_p$ 的选取无关(只要保证这 p 列所对应的因子为附加因子).

证 设从 X 中选出的 p 列为第 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_p\leqslant n$ 列,这 p 列对应的因子记为 $A_1,\cdots,A_p$,而剩余的 $n-p$ 个独立的基本因子记为 $B_1,\cdots,B_{n-p}$. 以 $x_1,\cdots,x_{n-p}$ 表示基本因子 $B_1,\cdots,B_{n-p}$ 所取的水平,即 $x_i=0,1,2,\cdots,s-1,\ i=1,\cdots,n-p$,以 $y_1,\cdots,y_p$ 表示附加因子 $A_1,\cdots,A_p$ 的水平($y_j=0,1,2,\cdots,s-1,\ j=1,\cdots,p$). 由文献[3]知,附加因子可由基本因子表示(即定义关系式),则存在常数 $\alpha_{ij}=0,1,2,\cdots,s-1,\ i=1,\cdots,p,\ j=1,\cdots,n-p$,使得

$$A_i = B_1^{\alpha_{i1}} \cdots B_{n-p}^{\alpha_{i\,n-p}},\ i = 1, \cdots, p, \tag{5}$$

于是,可以取 s^{n-p}设计的 p 个独立的生成元(generator)或称为等同元(identity element)为

$$B_1^{\alpha_{i1}} \cdots B_{n-p}^{\alpha_{i\,n-p}} A_i^{s-1},\ i = 1, \cdots, p. \tag{6}$$

取(6)式的生成元之后,可以得到 s^{n-p}设计的 p 个定义对照为

$$\begin{cases} l_1 = \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1\,n-p}x_{n-p} + (s-1)y_1 \pmod s, \\ \cdots\cdots \\ l_p = \alpha_{p1}x_1 + \cdots + \alpha_{p\,n-p}x_{n-p} + (s-1)y_p \pmod s. \end{cases}$$

当对设计矩阵 X 的第 j_k 列进行模 s 平移 η_k 时,即相当于对附加因子 A_k 的水平进行模 s 平移 η_k, $k=1, \cdots, p$,则由(4)式得到的 $X_c(\eta_1, \cdots, \eta_p; n, j_1, \cdots, j_p)$的定义对照值为

$$\begin{cases} l_p' = \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1\,n-p}x_{n-p} + (s-1)(y_1+\eta_1) = l_1 + (s-1)\eta_1 \pmod s, \\ \cdots\cdots \\ l_p' = \alpha_{p1}x_1 + \cdots + \alpha_{p\,n-p}x_{n-p} + (s-1)(y_p+\eta_p) = l_p + (s-1)\eta_p \pmod s. \end{cases}$$

当取不同的$(\eta_1, \cdots, \eta_p)$值时,得到了不同的定义对照 $\boldsymbol{l}' = (l'_1, \cdots, l'_p)$之向量值. 由于$(\eta_1, \cdots, \eta_p)$之值的取法有 s^p 种,故,$\boldsymbol{l}' = (l'_1, \cdots, l'_p)$的取法也有 s^p 种,又因对每一种 $\boldsymbol{l}'$的取值,都有一个陪集 $X_c(\eta_1, \cdots, \eta_p; n, j_1, \cdots, j_p)$与之对应,故共有 s^p 个陪集产生. 证毕.

例 1　试求由定义关系式 $I = AB^2C^2$ 产生的 3^{3-1}部分析因试验的所有陪集.

如取 $L_9(3^4)$表中的前 3 列作为 3^{3-1}部分析因试验的处理组合,则其 9 次试验如矩阵

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \tag{7a}$$

中的 9 行所示.

由于此时 $p=1$ 和 $C = AB^2$,故从 X 中任取一列,均能保证其余的 $3-1=2$ 列独立,如取 $j_1=2$,之后再从 0,1,2 中任取一整数,如 $\eta_1=1$,则得到矩阵 X 关于 $j_1=2$, $\eta_1=1$ 的示性为

$$I(1;\ 3,\ 2) = (0,\ 1,\ 0),$$

于是可以得到 3^{3-1}设计的一个陪集为

$$X_c(1;\ 3,\ 2) = X + \mathbf{1}_9 \cdot I(1;\ 3,\ 2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}. \tag{7b}$$

如取 $\eta_1=2$,则矩阵 X 关于 $j_1=2$, $\eta_1=2$ 的示性为

$$I(2;\ 3,\ 2) = (0,\ 2,\ 0),$$

于是又可以得到 3^{3-1}设计的另一个陪集为

$$X_c(2;\ 3,\ 2) = X + \mathbf{1}_9 \cdot I(2;\ 3,\ 2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \tag{7c}$$

容易验证,(7a),(7b),(7c)的3个陪集即为由定义对照

$$L = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

所产生的 3^3 设计的3个区组,故它们是 3^{3-1}设计的3个陪集.

例2 试求由生成元 $D = AB$, $E = AC$, $F = BC$ 生成的部分析因试验 2^{6-3}的陪集.

取 2^{6-3}设计的8次试验为

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

对于此设计,其定义对照为

$$l_1 = x_1 + x_2 + x_4,$$
$$l_2 = x_1 + x_3 + x_5,$$
$$l_3 = x_2 + x_3 + x_6,$$

且$(l_1,\ l_2,\ l_3) = (0,\ 0,\ 0)$,若取 $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$,则知剩余的3列并不独立,并且当$(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$取尽(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)7个值时,$(l_1,\ l_2,\ l_3)$的取值分别为(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(0,0,0),这样并不能产生8个陪集. 但如果按上面算法中的要求去选取3列,如后3列,则不难验证上述算法还是可行的. 这就说明,从 X 中选出的 p 列,要保证其余的 $n-p$ 列对应的因子为独立的,这一条件是必不可少的.

致谢 本工作为国家自然科学基金(批准号:19471040)资助项目.

参 考 文 献

1 Cheng C S, Li C C. Constructing orthogonal fractional factorial designs when some factor-level combinations are debarred. Technometrics, 1993, 35: 277~283

2 王兆军,张润楚. 避免不可实施组合的正交表存在的充要条件. 科学通报,1996,41(10):878~880

3 Franklin M F. Selecting defining contrasts and confounded effects in p^{n-m} factorial experiments. Technometrics, 1985, 27: 165~172

(1996-04-01 收稿)