流动撕裂模不稳定性的非线性饱和*

王 水　　郑惠南

(中国科学技术大学地球和空间物理系，合肥 230026)

关键词　不稳定性、磁岛、饱和

飞船观测资料表明在地球磁尾和等离子体彗尾中经常存在高速等离子体流动. ISEE 3 飞船资料指出，在远磁尾 ($|x| = 100—200R_E$, R_E 是地球半径)等离子体片中尾向等离子体流动是超 Alfvén 速的，速度在 200—1200km·s^{-1} 范围，平均速率为 500km·s^{-1}[1]. ICE 飞船资料表明在 Giacobini-Zinner 彗星尾瓣中等离子体流动速度约为 200km·s^{-1}[2]. 电流片中的剪切等离子体流动显然将影响到撕裂模不稳定性的性质. 这种由剪切等离子体流动和有限电阻激发的混合模简称为流动撕裂模不稳定性[3,4]. 一些作者解析和数值地讨论了流动撕裂模的本征模特征和线性增长率[3—9].

本文的目的是研究流动撕裂模不稳定性的非线性演化. 基本方程组可以写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right] = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - \frac{c^2}{4\pi}\nabla \times (\eta \nabla \times \boldsymbol{B}), \tag{3}$$

$$\frac{\partial (p\rho^{-\gamma})}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(p\rho^{-\gamma}) = 0, \tag{4}$$

式中 ρ、p、$\boldsymbol{v}$ 分别是等离子体密度、压力和流动速度，$\boldsymbol{B}$ 是磁感应强度，η 是电阻率，c 为真空中光速，$\gamma = 5/3$ 为比热之比. 能量方程中未考虑焦耳加热的影响.

电流片的初始平衡态取为

$$\boldsymbol{B}_0(z) = B_\infty \tanh\left(\frac{z}{\delta}\right) i_x, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{v}_0(z) = v_{0m}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{z}{\delta}\right) i_x, \tag{6}$$

$$\rho_0(z) = \rho_\infty + \frac{B_\infty^2}{8\pi R T_0}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{z}{\delta}\right), \tag{7}$$

式中 δ 是电流片的特征半厚度，ρ_0、T_0、$\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{B}_0$ 分别表示等离子体密度、温度、速度和磁场的初始值；B_∞ 和 ρ_∞ 分别是远离电流片处的磁场 x 分量和等离子体密度，v_{0m} 是 $z = 0$ 处的等离子体流动速度，R 是气体常数. 为了维持初始平衡态，电阻率 η 应是 z 的函数. 然而数值计算结果表明[3]，取常数电阻率所得到的不稳定性增长率与随空间变化电阻率所得结果基本相同. 在以下计算中 η 取为常数. 我们采用初值逼近方法来计算流动撕裂模不稳定性的增长率. 磁

本文 1991 年 1 月 21 日收到. 1991 年 6 月 18 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

场 $\boldsymbol{B}$ 可用一势函数 ψ 来表达:

$$B_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_y = 0, \quad B_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{8}$$

限于讨论二维 $\left(\frac{\partial}{\partial y} = 0\right)$、二分量 ($B_y = 0$, $v_y = 0$) 情况,则基本方程(1)—(4)可改写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - v_x\frac{\partial \rho}{\partial x} - v_z\frac{\partial \rho}{\partial z}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) - v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial \psi}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) - v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} - v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -v_x\frac{\partial \psi}{\partial x} - v_z\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{c^2\eta}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right), \tag{12}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -v_x\frac{\partial p}{\partial x} - v_z\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right). \tag{13}$$

可从数值求解方程组(9)—(13),看小扰动随时间的发展. 若初始平衡态(5)—(7)式是不稳定的,最快的增长模将在数值解中占主导位置,即可得到该最快增长模的增长率和本征模.

方程(9)—(13)用 Runge-Kutta 法数值求解. 空间步长取为 $\Delta x = 0.45\delta$, $\Delta z = 0.125\delta$. 根据 Courant 条件,时间步长为

$$\Delta t = 0.4\min\left(\frac{\Delta x}{v_{x\max}}, \frac{\Delta z}{v_{z\max}}\right), \tag{14}$$

式中 $v_{x\max} = |v_x| + c_s$, $v_{z\max} = |v_z| + c_s$, c_s 为局地声速. 计算区域必须很大于电流片的特征半厚度. 系统尺度取为 $-14.4\delta \leqslant x \leqslant 14.4\delta$, $-8\delta \leqslant z \leqslant 8\delta$,即可略去边界对计算结果的影响. 在 $x = \pm 14.4\delta$ 处采用周期边界条件,在 $z = \pm 8\delta$ 处采用自由边界条件. 计算中将方程(9)—(13)写成无量纲形式. 无量纲长度、速度、时间、密度、压力、磁感应强度和磁势函数分别用 δ、$v_{A\infty}$、τ_A、ρ_∞、p_∞、B_∞ 和 ψ_∞ 来标定, 这里, $v_{A\infty} = B_\infty/(4\pi\rho_\infty)^{\frac{1}{2}}$, $\tau_A = \delta/v_{A\infty}$, $p_\infty = \rho_\infty RT_0$, $\psi_\infty = \delta B_\infty$. 无量纲电阻率定义为 $\eta^* = \eta c^2/4\pi\delta v_{A\infty}$, 磁 Reynolds 数 $S = 4\pi\delta v_{A\infty}/\eta c^2$. 在下面计算中取远离电流片处的等离子体压力与磁压之比

$$\beta_\infty = \frac{8\pi p_\infty}{B_\infty^2} = 0.1,$$

而 $S = 100$, $v_{0m} = 2v_{A\infty}$. 由于在 $x = \pm 14.4\delta$ 处采用了周期边界条件, 无量纲波数 $k\delta = 0.436$,这接近流动撕裂模具有最大线性增长率的波数[3].

部分数值计算结果如图 1—3 所示. 图 1 给出了磁场 z 分量最大振幅的对数值 $\ln(|B_z|_{\max}/B_\infty)$ 随时间的变化. 可以看出在 $t < 1\tau_A$ 时 $|B_z|_{\max}$ 随时间呈指数增长, 图 1 中直线部分的斜率即流动撕裂模不稳定性最快增长模的线性增长率. 约从 $t \approx 1\tau_A$ 开始, $|B_z|_{\max}$ 的增长速率逐渐降低,最终当 $t \approx 10\tau_A$ 时它趋于一常值. 这意味着流动撕裂模不稳定性饱和了.

图 2 描绘了流动撕裂模非线性演化阶段的磁场位形. 可以看出, 当 $t = 4\tau_A$ 时电流片中磁岛已经形成, 但岛宽很小; 当 $t = 8\tau_A$ 时磁岛半宽度约为 0.5δ; 当 $t = 12\tau_A$ 时磁岛半宽

度趋近于电流片的半厚度 δ，其后近似有相同宽度，即磁岛宽度已经饱和．从图 2 还可看出磁岛沿着 x 方向运动，其移动速度接近电流片中心处等离子体流动速度 v_{0m}．同时，磁岛形状对 $z=0$ 轴是对称的，而在 x 方向是不对称的．

图 3 给出了不同时刻归一化等离子体密度 ρ/ρ_∞ 的分布．可以看出，磁岛处出现具有高等离子体密度的等离子体团，且也以速率 v_{0m} 沿着 x 方向运动．等离子体团的饱和宽度接近磁岛的饱和宽度，即电流片的厚度．

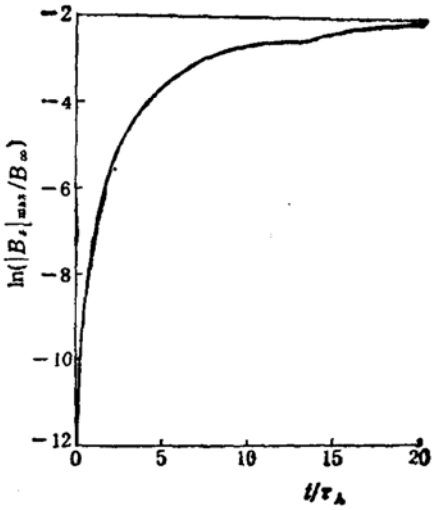


图 1　磁场 z 分量最大振幅随时间的变化
$\beta_\infty=0.1$，$S=100$，$v_{0m}=2v_{A\infty}$

一些作者曾经指出[10]，对于纯撕裂模不稳定性，撕裂模岛宽在经历短暂的指数增长之后，当岛宽可与电阻边界层厚度相比时，它开始随时间呈线性函数增加，最后岛宽饱和．上述数值结果表明，流动撕裂模不稳定性也存在这种非线性饱和．

另一方面，Lee 和 Fu[11] 发现纯撕裂模不稳定性（$v_{0m}=0$）的最大线性增长率当（$10\leqslant S\leqslant 10^5$）时可近似表达为 $\gamma_{max}=0.075\tau_A^{-1}\tanh(8/S^{0.5})$．当 $S>100$ 时，该增长率可写为

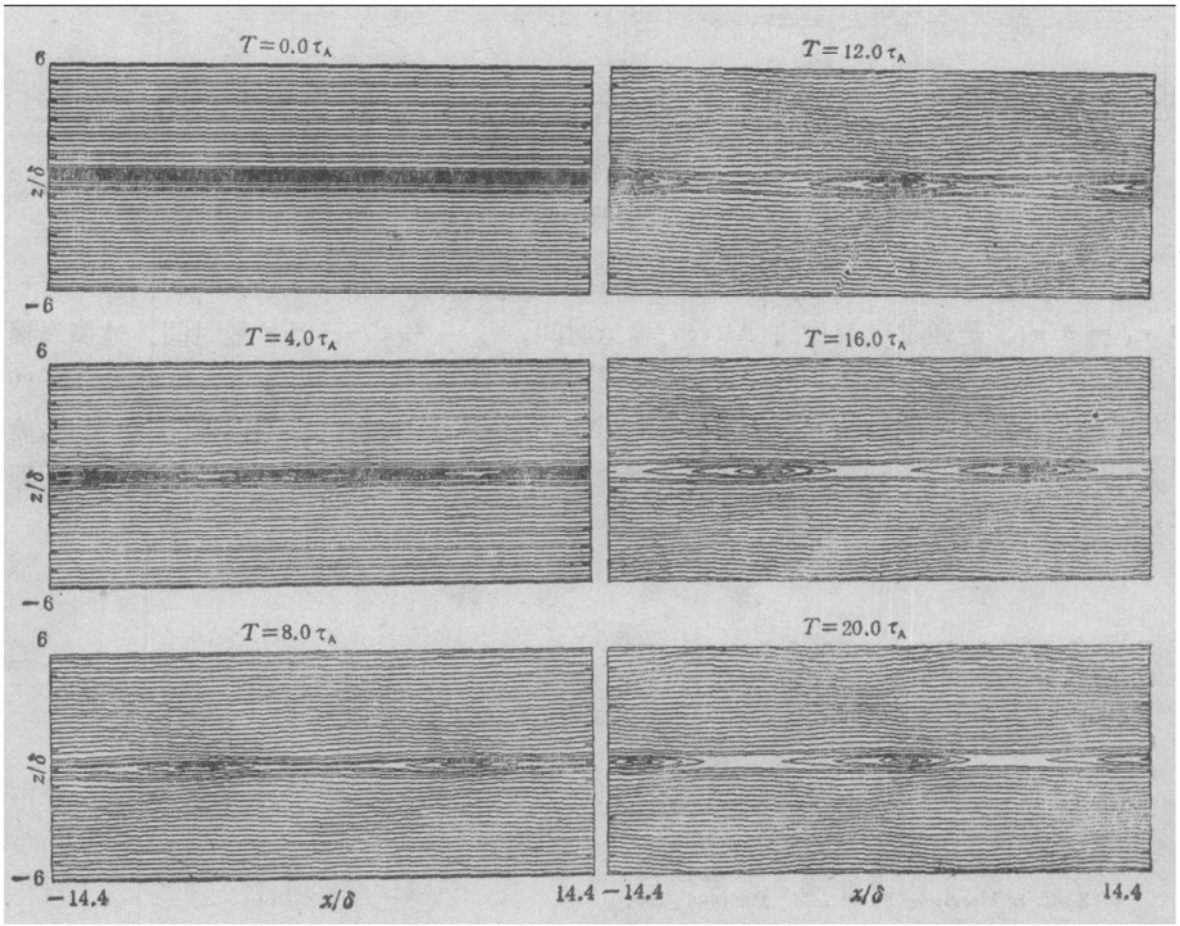


图 2　磁场位形的演化
$\beta_\infty=0.1$，$S=100$，$v_{0m}=2v_{A\infty}$

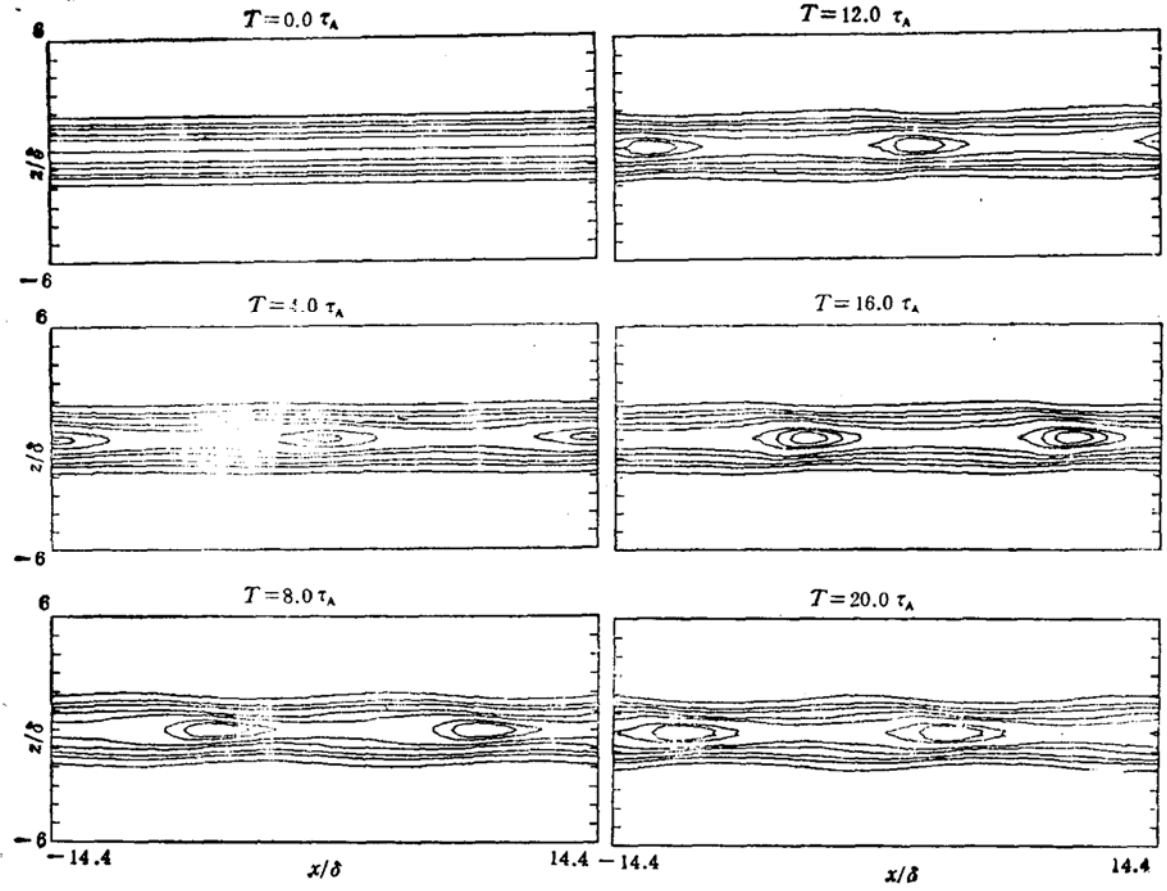


图3 归一化等离子体密度 ρ/ρ_- 的分布

$\beta_- = 0.1$, $S = 100$, $v_{0m} = 2v_{A-}$

$$\gamma_{max} \simeq 0.6\tau_A^{-1}S^{-\frac{1}{2}} \simeq 0.6(\tau_D\tau_A)^{-\frac{1}{2}},$$

式中 $\tau_A = \delta/v_{A\infty}$ 是通过电流片的 Alfvén 输运时间，$\tau_D = 4\pi\delta^2/\eta c^2$ 是扩散时间. 纯撕裂模的特征增长时间约为 $(\tau_D\tau_A)^{\frac{1}{2}}$. 然而，流动撕裂模的特征增长时间[3]和磁岛饱和时间约为 10 τ_A. 对于具有小电阻率的空间等离子体，扩散时间 τ_D 很大于 Alfvén 输运时间 τ_A，因此，流动撕裂模的增长率很大于纯撕裂模. 关于各种情况下流动撕裂模不稳定性非线性演化的详细讨论，请参阅另文[12].

参 考 文 献

[1] Slavin, J. A. et al., *J. Geophys. Res.*, 90(1985), 10875.
[2] Baker, D. N. et al., *Geophys. Res. Lett.*, 13(1986), 271.
[3] Wang, S., Lee, L. C. & Wei, C. Q., *Phys. Fluids*, 31(1988), 1544.
[4] Lee, L. C. et al., *J. Geophys. Res.*, 93(1988), 7354.
[5] Hofmann, I., *Plasma Phys.*, 17(1975), 143.
[6] Paris, R. B. & Sy, W. N. C., *Phys. Fluids*, 26(1983), 2966.
[7] Einaudi, G. & Rubini, F., *ibid.*, 29(1986), 2563.
[8] Bondeson, A. & Persson, M., *ibid.*, 29(1986), 2997.
[9] Chen, X. L. & Morrison, P. J., *ibid.*, B2(1990), 495.
[10] Bateman, G., *MHD Instabilities*, MIT Press, 1978, 203.
[11] Lee, L. C. & Fu, Z. F., *J. Geophys. Res.*, 91(1986), 3311.
[12] 王水、滑惠南，地球物理学报，34(1991)，6.