MIT口袋的波包展开

蔡 勖 杨仲乐 刘连寿
(华中师范学院)

MIT 袋模型的拉氏量[1]是明显平移不变的，然而它的球腔近似解却不具有这种不变性. 为了克服这一缺点，Donoghue 和 Johnson[2] 建议对球腔近似解作波包展开，并将这种波包展开应用于质子衰变寿命的计算[3].

在文献 [4] 中，我们进一步发展了波包展开的思想，提出了用袋模型处理强子动力学过程的一种普遍方法. 这个方法充分注意到引起囚禁的集体自由度对强子过程的影响，恰当地实现了口袋整体运动与内部运动的分离，自动地得到了 4-动量守恒，从而避免了迄今为止不少作者[5—7,3]在用袋模型讨论强子衰变时完全忽略反冲效应的粗糙作法.

以 π 介子为例，通常处理强子静态问题的中心在 x_0 处的球腔近似解可以用动量本征态展开

$$|\pi(x_0)\rangle_{t=0}=\int\frac{d^3p}{2E_p}\varphi_\pi(p)e^{-ip\cdot x_0}|\pi(p)\rangle_{t=0}; \tag{1}$$

反过来，动量本征态又可以表为中心处于不同位置的口袋的迭加

$$|\pi(p)\rangle=\frac{2\sqrt{m_\pi E_p}}{\varphi_\pi(0)}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x_0e^{i(p\cdot x_0-E_pt)}|\pi(x_0)\rangle_{t=0}^{(p)}. \tag{2}$$

这是我们方法的基本公式. 显然，在这一类波包展开方法中，关键性的步骤在于确定波包函数 $\varphi(p)$ 和波包的中心值 $\varphi(0)$.

Donoghue 和 Johnson[2] 计算 π 介子的波包函数 $\varphi(p)$ 时，利用了 $\pi\to\mu\nu$ 过程的流矩阵元，他们还假定这样求得的 $\varphi(p)$，可以推广到一切介子和重子. 这种做法存在着两个严重的缺点：一是由于求得的 $\varphi(p)$ 依赖于计算矩阵元时所选用的流，具有任意性，使得 $\varphi(p)$ 不唯一；二是认为一切介子和重子都有相同形式的 $\varphi(p)$，缺乏根据. 产生这些缺点的原因是他们的做法中间包含了一种非常粗糙的假定，即忽略了不同的强子口袋的差别，并认为空口袋和物理真空等同.

为了消除 $\varphi(p)$ 的不唯一性，使得袋模型的波包展开方法具有可靠的基础，我们在本文中提出了计算各种介子和重子波包函数的一种更为合理而普适的方法.

仍以 π 介子为例，中心在 x_0 处的 π 介子口袋态归一化为

$$\langle\pi(x_0)|\pi(x_0)\rangle=1. \tag{3}$$

在强子过程中出现的动量本征态是中心在不同位置的口袋的迭加，如式 (2). 因此，有必要研究中心在不同位置的口袋态的乘积 $\langle\pi(x_0')|\pi(x_0)\rangle$. 这一乘积只应依赖于两口袋中心的距离 $r=|r|=|x_0'-x_0|$，因而令

本文 1981 年 1 月 14 日收到.

$$\langle \pi(x_0') | \pi(x_0) \rangle = F_\pi(r), \tag{4}$$

其中 $F_\pi(r)$ 应满足条件

$$F_\pi(r) = \begin{cases} 1 & \text{当} \quad r = 0, \\ 0 & \text{当} \quad r \geqslant 2R_\pi, \end{cases} \tag{5}$$

R_π 为 π 介子的口袋半径.

式 (4) 是归一化条件式 (3) 的推广. 为求 $F_\pi(r)$, 将二粒子(夸克和反夸克)坐标本征矢的完备性条件

$$\int |x_1 x_2\rangle\langle x_1 x_2| dx_1 dx_2 = 1 \tag{6}$$

插入 (4) 式的左边. 用 u 和 v 分别表示袋模型中正反夸克的球腔近似波函数[5], 则有(为简单起见,不明显写出波函数的 $SU(6)$ 和 $SU(3)_c$ 部分):

$$\langle x_1 x_2 | \pi(x_0) \rangle = u(x_1 - x_0) v(x_2 - x_0), \tag{7}$$

因而得到

$$F_\pi(r) = \int_\Omega d^3x_1 u^+(x_1 - x_0') u(x_1 - x_0) \int_\Omega d^3x_2 v^+(x_2 - x_0') v(x_2 - x_0), \tag{8}$$

其中 Ω 为两个口袋的重迭区域.

这一结果不难推广到其它介子和重子. 在重子情况下, 代替 (6) 式的是三粒子 (三个夸克)的坐标本征矢的完备性条件

$$\int |x_1 x_2 x_3\rangle\langle x_1 x_2 x_3| d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 = 1. \tag{9}$$

在图 1 上画出了通过数值计算得到的介子和重子的 $F(r)$ 曲线 (以无因次变量 $x = r/2R$ 为横坐标). 在同一图上还画出了忽略强子内部的夸克分布、只考虑口袋重迭效应而得到的近似公式

$$\langle \pi(x_0') | \pi(x_0) \rangle \approx \frac{\Omega}{V_\pi} = F_\Omega(r) \tag{10}$$

的 $F_\Omega(r)$ 曲线

$$F_\Omega(r) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{4}\dfrac{r}{R_\pi} + \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{r}{R_\pi}\right)^3, \\ \qquad\qquad \text{当} \quad r \leqslant 2R_\pi, \\ 0, \qquad\quad \text{当} \quad r > 2R_\pi. \end{cases} \tag{11}$$

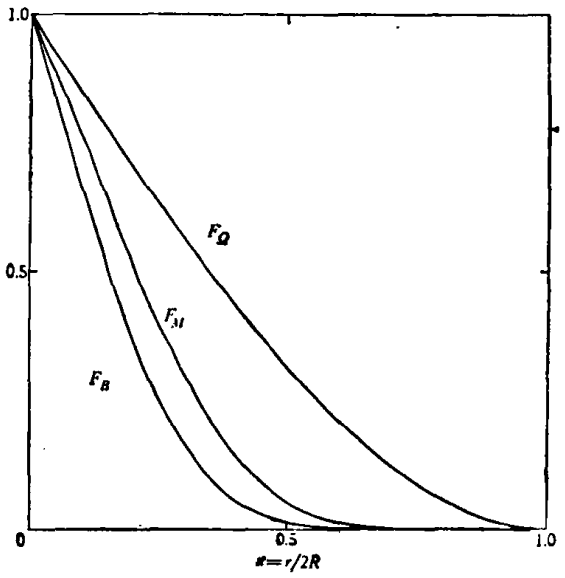

图 1

将波包展开式 (1) 代入 (4) 式,并利用动量本征态的正交归一性 $\langle \pi(p') | \pi(p) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3 \cdot (p' - p) 2E_p$, 立刻求出波包函数

$$|\varphi_\pi(p)|^2 = \frac{2E_p}{(2\pi)^6} \int d^3r e^{-ip\cdot r} F_\pi(r). \tag{12}$$

这一公式适用于一切介子,而对于重子有

$$|\varphi_B(p)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{E_p}{m_B} \int d^3r e^{-ip\cdot r} F_B(r). \tag{13}$$

根据这两个公式,利用图 1 的结果,可求得 π 介子、ρ 介子和质子的波包函数的模 $|\varphi(p)|$, 如

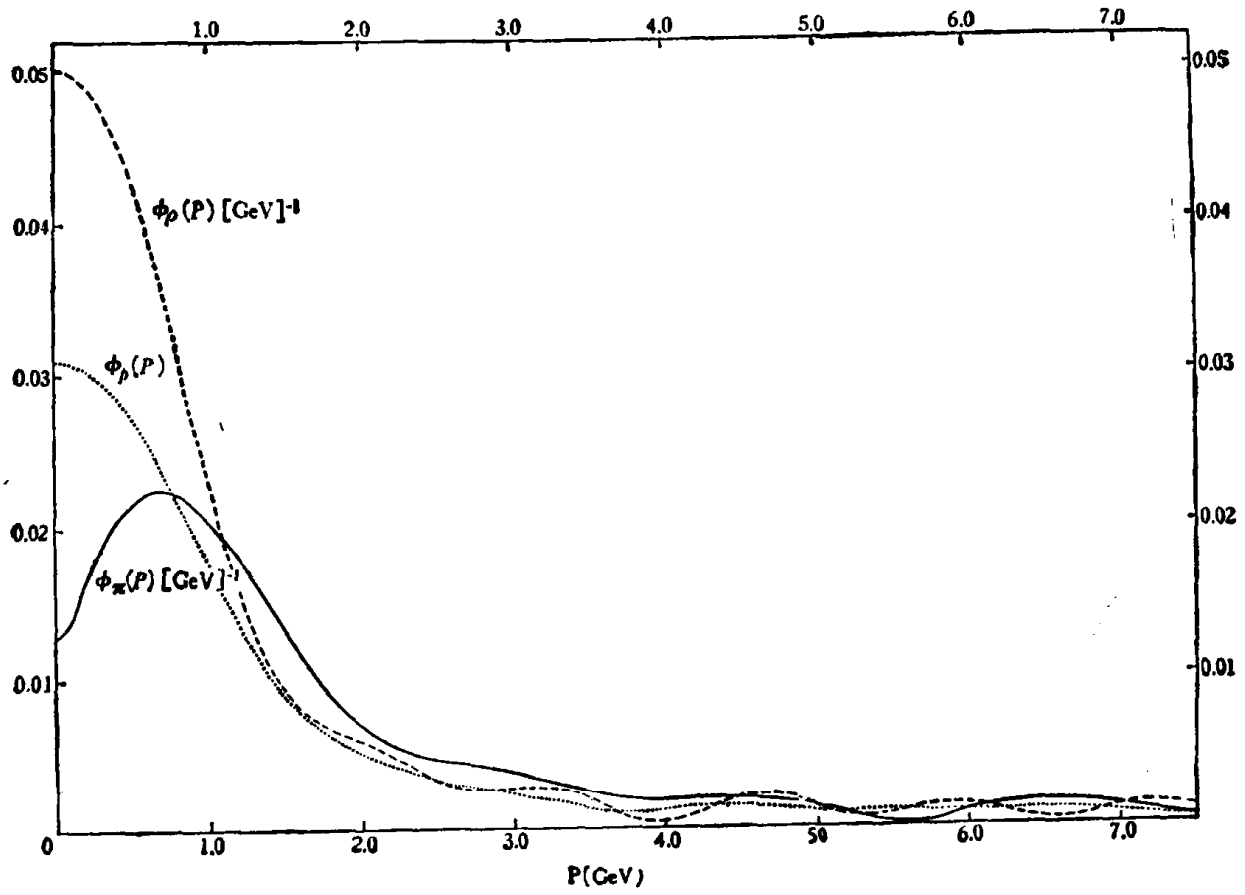

图 2

图 2.

由图 2 可见，π 介子的波包函数与其它介子和重子的波包函数有明显区别，其原因在于 π 介子是唯一的一个口袋半径小于康普顿波长的强子. 由此可以进一步看出，Donoghue 等人[2,3]不加分析地将 π 介子的 $\varphi(p)$ 推广到一切介子和重子的做法是不能令人满意的.

波包函数 $|\varphi(p)|$ 也可以利用近似公式 (10) 来计算. 在此情况下，对于波包的中心高度 $|\varphi_\pi(0)|$，得到

$$|\varphi_\pi(0)|^2 = \frac{2m_\pi}{(2\pi)^6} V_\pi. \tag{14}$$

这正是在文献 [4] 中的公式 (16).

参 考 文 献

[1] Johnson, K., *Phys. Lett.*, 78B (1978), 259.
[2] Donoghue, J. F. & Johnson, K., *Phys. Rev.*, D21 (1980), 1975.
[3] Donoghue, J. F., *Phys. Lett.*, 92B (1980), 99.
[4] 刘连寿、蔡勖、杨仲乐，科学通报，25(1981), 8:465.
[5] Gundue, W., Hey, A. J. G. & Walters, P. J., *Phys. Rev.*, D21 (1980), 271.
[6] Schepkin, M., CERN Preprint, Ref. TH-2503, 1978.
[7] Din, A. M., Girardi, G. & Sorba, P., LAPP-TH-08, 1979.